<u>10. tétel:</u>
Számsorozatok és tulajdonságaik. Nevezetes sorozatok.

A témakör tartalmi felépítése:

- Sorozat fogalma, és tulajdonságai
- Nevezetes sorozatok
- Tétel + bizonyítás
- Alkalmazás

Sorozat fogalma:

- A pozitív egész számok halmazán értelmezett valós számértékű függvény.
- Ha egy függvény értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza, értékkészlete a valós számok egy részhalmaza, akkor ezt a függvényt valós számsorozatnak, vagy röviden sorozatnak nevezzük.

Korlátosság:

- Az $\{a_n\}$ sorozat alulról korlátos, ha létezik olyan *k* valós szám, hogy minden *n*-re $a_n \geq k$. A *k* számot a sorozat alsó korlátjának nevezzük.
- Az $\{a_n\}$ sorozat felülről korlátos, ha létezik olyan *K* valós szám, hogy minden *n*-re $a_n \leq K$. A *K* számot a sorozat felső korlátjának nevezzük.
- Ha egy sorozat alulról és felülről is korlátos, akkor **korlátos sorozatról** beszélünk. Ez azt jelenti, hogy vannak olyan *k* és *K* számok, hogy minden *n* – re $k \leq a_n \leq K$. A korlátos $\{a_n\}$ sorozat [*k* , *K*] zárt intervallumon helyezkedik el.

Monotonítás:

- a_n sorozat monoton növekvő, ha minden pozitív egész *n*-re teljesül, hogy $a_{n+1} \geq a_n$.
- a_n sorozat monoton csökkenő, ha minden pozitív egész *n*-re teljesül, hogy $a_{n+1} \leq a_n$.
- Szigorúan monoton növekvő sorozatnál az egyenlőség nem megengedett.
  Szig. mon. növ. sorozat pl: 1,2,3,4,5,6,7…
  Szig. mon. csök. sorozat pl: 10,8,6,4,2,0,-2….

Konvergencia:

- Az *A* számot az a_n sorozat határértékének nevezzük, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan *N* küszöbszám, ha *n*>*N*, akkor $|a_n - A| < \varepsilon$.

Nevezetes sorozatok:

- **Számtani sorozat:** olyan sorozat, amelyben (a második tagtól) bármely tag és az őt megelőző tag különbsége állandó.
  Ez a különbség a differencia. Jele: *d*
  Ha egy számtani sorozatnál **d > 0** , akkor a sorozat monoton növekvő, és alulról korlátos.
  Ha **d < 0**, akkor a számtani sorozat monoton csökkenő, és felülről korlátos.
  Ha pedig **d = 0**, akkor a számtani sorozat nem növekvő, nem csökkenő, azaz állandó.
  Számtani sorozat pl: 1,4,7,10,13,16 d=3
  Az első tag kivételével a számtani sorozat bármelyik tagja a tőle balra és jobbra szimmetrikusan elhelyezkedő két tag számtani közepével egyenlő.

- **Mértani sorozat:** olyan sorozat, amelyben (a második tagtól) bármely tag és az őt megelőző tag hányadosa állandó. Ez a hányados a *kvóciens*. Jele: q
  Ha egy mértani sorozatnál:
  q>0, akkor a mértani sorozat állandó előjelű.
  q<0, akkor a mértani sorozat váltakozó előjelű.
  |q| > 1, akkor a mértani sorozat tagjainak abszolút értékei növekvőek.
  0 < |q| < 1,akkor a mértani sorozat tagjainak abszolút értékei csökkenőek
  |q| = 1, akkor a mértani sorozat tagjainak abszolút értékei állandóak.

  Mértani sorozat pl: 1,2,4,6,8,10… q=2
  A pozitív számokból álló mértani sorozat bármelyik tagja a második tagtól kezdve a tőle balra és jobbra szimmetrikusan elhelyezkedő tagok mértani közepe.

- **Fibonacci sorozat:** olyan sorozat amelyben a harmadik tagtól kezdve, minden tag az őt megelőző két tag összegével egyenlő.
  1,1,2,3,5,8,13,21…

Tétel + Bizonyítás:

- *Számtani sorozat n-dik tagjának felírása:*

$$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d$$

Bizonyítás: Teljes indukció

$$n=1 \quad a_1 = a_1 + 0d$$

$$n=2 \quad a_2 = a_1 + 1d$$

tegyük fel h: $a_n = a_1 + (n-1)d$

Bizonyítsuk be h: $a_{n+1} = a_1 + nd$

$$a_{n+1} = a_n + d = \left[a_1 + (n-1)d\right] + d = a_1 + nd$$

- *Számtani sorozat első n tagjának összege:*

$$S_n = n\frac{(a_1 + a_n)}{2}$$

Bizonyítás:

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1$$

$$2S_n = (a_n + a_1) + (a_{n-1} + a_2) + ... + (a_2 + a_{n-1}) + (a_1 + a_n) = n(a_1 + a_n)$$

$$S_n = n\frac{(a_1 + a_n)}{2}$$

Alkalmazás:

- Matematikai:

-kamatszámítás:

100000 Ft-t lekötünk 10 évre, a kamat 8%. Mennyi pénzünk lesz a 10. év végére?

$$100000 \cdot (1,08)^{10} = 2158924Ft$$

-összegzési problémák

- Pénzügyi számításokban:

-járadék értékének kiszámítása

-törlesztés évi részletének számításában

2500000Ft kölcsön felvétele esetén, évi 6%-os kamattal, mennyi az évi törlesztő részlet, ha 10 év múlva a kölcsön vissza lesz fizetve?

$$2500000 \cdot 1,06^{10} - 1,06x\left(\frac{1,06^{10} - 1}{1,06 - 1}\right) = 0$$

$$x = 320443Ft$$

<u>Kidolgozója</u>: *Gőz Gábor* 12.D