12. Tétel
A hasonlóság és alkalmazásai háromszögekre vonatkozó tételek bizonyításában

1.A témakör tartalmi felépítése:

- Alakzatok hasonlósága
- Hasonlósággal kapcsolatos tételek
- Hasonlóság alkalmazása egy feladat során
- Egyéb alkalmazások

2. A témakör tartalmi felépítésének kifejtése:

2.1.Történeti bevezető

A **geometria** a matematika térbeli törvényszerűségek, összefüggések leírásából kialakult ága; maga a *geometria* szó görögül eredetileg *földmérés*t jelentett. Kialakulásában szerepet játszott az ókori gazdasági rendszer (innen ered a terület- és térfogatszámítás), és csillagászat is. A geometria az i.e. V. század körül elszakadt tapasztalati gyökereitől, az eleata filozófusok (leginkább Zénón) és olyan tudósok, mint Thalész hatására. A geometria az első tudományág, amit deduktív módon, vagyis axiómarendszer formájában építettek fel (ez elsősorban Euklidész nevéhez fűződik).

Kb. 4000 éves írásos emlékek szerint a babilóniaiak már ismerték a háromszögek hasonlóságának fogalmát.

2.2 A középpontos hasonlósági transzformáció: Megadunk egy pontot, a középpontos hasonlósági transzformáció középpontját (O pont) és egy λ valós számot (λ≠0). Valamely ponthoz a következőképp rendeljük hozzá a képét:

Ha P=O akkor P képe önmaga.

Ha Q≠O akkor Q képe OQ egyenes olyan Q' pontja, amelyre |OQ'|= |λ| * |OQ|, mégpedig ha λ>0 akkor Q' az OQ félegyenesen van, ha λ<0 akkor Q' az OQ egyenes Q-t nem tartalmazó félegyenesén van.
λ : a középpontos hasonlóság aránya

2.3 Alakzatok hasonlósága: Két alakzat hasonló, ha létezik olyan hasonlósági transzformáció, amely az egyik alakzatot a másikba viszi.
Azt ha *A* alakzat hasonló egy *B* alakzathoz, a következőképpen jelöljük: *A~B*

- Minden alakzat hasonló önmagához, azaz A~A.(identitás)
- Ha A~B, akkor B~A. (kommutativitás)
- Ha A~B és B~C, akkor A~C.

Definíció: Két alakzat *hasonlóságának aránya* az egymásnak megfelelő szakaszok hosszának aránya.

2.3 Tételek:

1. Háromszög hasonlóságának alapesetei:
   Két háromszög akkor és csakis akkor hasonló, ha a következő feltételek egyike teljesül:
   - megfelelő oldalaik hosszának aránya páronként egyenlő
   - 2-2 oldalhosszuk aránya egyenlő és az ezek által közrefogott szögek nagysága egyenlő
   - 2-2 szögük páronként egyenlő nagyságú
   - 2-2 oldalhosszuk aránya egyenlő és e 2-2 oldal közül a nagyobbik oldallal szembelévő szögek nagysága egyenlő

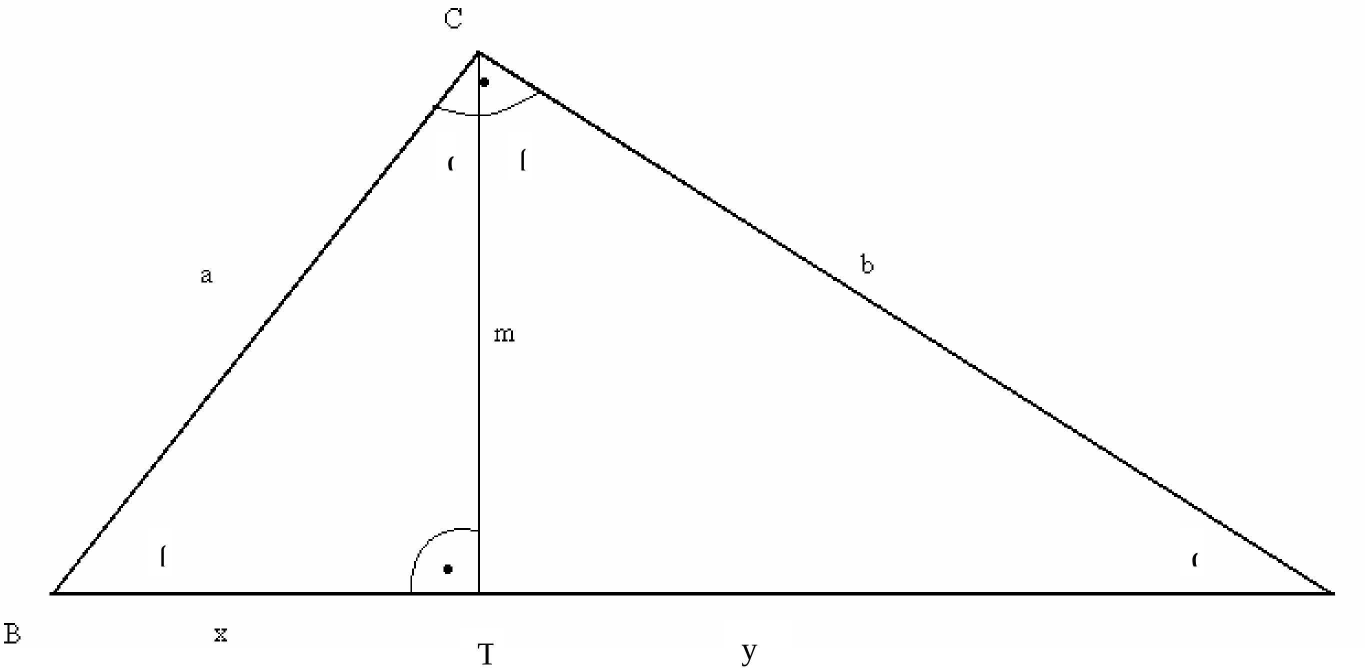
2. A párhuzamos szelők tétele: Ha egy szög szárait párhuzamos egyenesekkel metsszük, akkor az egyik száron keletkező szakaszok hosszának aránya egyenlő a másik száron keletkező szakaszok hosszának arányával.

3. A párhuzamos szelők tételének megfordítása: Ha két egyenes egy szög száraiból olyan szakaszokat vág le, amelyeknek aránya mindkét száron egyenlő akkor a két egyenes párhuzamos.
4. Párhuzamos szelő szakaszok tétele: Egy szög szárait metsző párhuzamosokból a szárak által kimetszett szakaszok aránya megegyezik a párhuzamosak által az egyik szárból kimetszett szakaszok arányával.

5. Szögfelezőtétel: A háromszög belső szögfelezője a szemközti oldalt a szomszédos oldalak hosszának arányában osztja két részre.

6. Befogótétel: Derékszögű háromszögben az egyik befogó mértani közepe az átfogón lévő merőleges vetületének és az átfogónak. (a^2=c*x, b^2=c*y)

7. Magasságtétel: Derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság mértani közepe az átfogó két szeletének.



ABCΔ ~ CBTΔ ~ ACTΔ a derékszög és a közös hegyesszögek miatt.

A hasonlóságból következik, hogy megfelelő oldalaik aránya egyenlő.

A CBT és ACT háromszögekből a befogók aránya:

|CT| : |BT| = |TA| : |CT|

CT ^{2}=|BT| * |TA|

Rövidebb jelöléssel: m ^{2}= x*y

2.4 Feladatok:

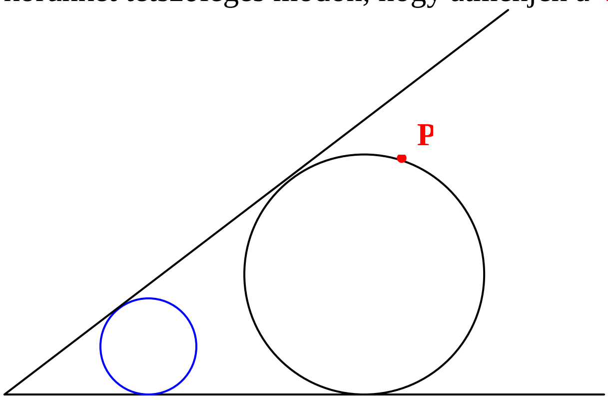
1.Derékszögű háromszögben a derékszögű csúcsból húzott magasság az átfogót 2:3 arányban osztja két részre. A rövidebbik befogó 12 cm hosszú. Mekkorák a háromszög ismeretlen oldalai?

Az átfogóból levágott 2 részt jelöljük x-szel és y-nal. x:y=2:3 tehát 3x=2y.
Ha felírjuk a befogótételt mindkét befogóra, akkor az alábbi egyenletrendszert kapjuk:
a^2=cx és b^2=cy
Behelyettesítve a-val: 144=c*x ennek 3szorosa: 432=3 * cx
3x helyére 2yt helyettesítve:
432=2y*c

$b^2=y*c$ Tehát $b^2=216$ b=6*(gyök6)
c=6*(gyök10)

2. Adott egy szög, szárai között egy P pont. Szerkesszünk kört, amely érinti a szögszárakat és átmegy a P ponton.

Először szerkesszünk egy tetszőleges, a szögszárakat érintő kört. Mivel a szögszárakat érintő körök párhuzamos helyzetűek és hasonlók, a hasonlóság középpontja a szög csúcsa, ezért fel tudjuk nagyítani a körünket tetszőleges módon, hogy átmenjen a P ponton (2 megoldást kapunk).



2.5 Alkalmazások:

1. *Matematikán belüli alkalmazások*
• Adott egy egységnyi hosszúságú szakasz és egy *n* pozitív egész szám. Szerkesszünk olyan szakaszt, amelynek hossza az *n* négyzetgyöke!
• Igazoljuk geometriai úton a két pozitív szám számtani és mértani közepe közötti egyenlőtlenséget!
• **A Pithagorasz-tétel bizonyítása befogótétellel.**
A befogótétel értelmében $a^2=c*x$ és $b^2=c*y$.
A két egyenlet bal oldalának összege a befogók négyzetösszegét adja:
$a^2 + b^2 = c*x + c*y = c(x + y)=c^2$
Pitagorasz tételéhez jutottunk.

Kidolgozója: *Ferenc Áron* 12.D