

15. tétel:

Összefüggések a háromszög oldalai és szögei között

A témakör tartalmi felépítése:

- Háromszögek alapfogalmai
- Háromszögek csoportosítása oldalai, és szögeik szerint
- A témakörhöz kapcsolódó tételek
- Tételbizonyítás

1. Háromszögek alapfogalmai:

- *háromszög*: a síknak három, nem egy egyenesen lévő pont és az őket összekötő szakaszokkal határolt részét nevezzük háromszögnek.
- *háromszög-egyenlőtlenség*: A háromszög bármely két oldalának összege nagyobb a harmadik oldalnál.
- *háromszög egyértelműen meghatározható*:
 - három oldalával
 - két oldalával és a közbezárt szögével
 - egy oldalával, és a rajta fekvő két szöggel
 - két oldalával, és a nagyobbikkal szemközti szögével

2. Háromszögek csoportosítása:

- **Szögek szerint:**
 - o *Hegyesszögű*: minden szöge hegyesszög (kisebb 90° -nál).
 - o *Derékszögű*: van egy 90° -os szöge. A derékszöget bezáró oldalak a befogók, a derékszöggel szemközti oldal az átfogó.
 - o *Tompaszögű*: egyik szöge tompaszög (nagyobb 90° -nál).
- **Oldalak szerint:**
 - o *Általános háromszög*: olyan háromszög, amelynek oldalai különböző hosszúságúak.
 - o *Egyenlő szárú háromszög*: olyan háromszög, melynek van két egyenlő oldala. A két egyenlő oldal (szár) metszéspontját és a szemközti oldal felezőpontját összekötő egyenes a háromszög tükörtengelye.

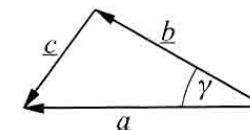
- o *Szabályos háromszög*: olyan háromszög, melynek mindhárom oldala egyenlő hosszúságú.

3. Tételek:

- A háromszög belső szögeinek összege 180° . $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$
- A háromszög külső szögeinek összege 360° .
- Egy háromszögben nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van.
- Egy háromszögben nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal van.
- Egyenlő oldalakkal szemben egyenlő szögek és egyenlő szögekkel szemben egyenlő oldalak vannak.
- Pitagorasz tétele és megfordítása: Egy háromszög akkor és csakis akkor derékszögű, ha két oldalhosszának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal hosszának négyzetével.
- **Koszinusztétel:**

Bármely háromszögben egy oldal négyzetét megkapjuk, ha a másik két oldal négyzetének összegéből kivonjuk a két oldal és a közbezárt szög koszinusza szorzatának kétszeresét.

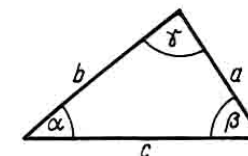
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$



- **Színusztétel:**

Bármely háromszögben az oldalak aránya egyenlő a velük szemközti szögek szinuszának arányával:

$$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$$



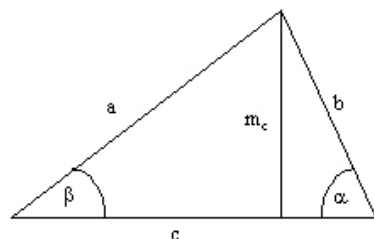
4. Szinusztétel bizonyítása:

a) Két esetet vizsgálunk.

- *hegyesszögű háromszög esetén*

Tekintsük a háromszög két oldalát és az ezekkel szemközti két szögét.

Húzzuk meg a harmadik oldalhoz tartozó magasságát.



Fejezzük ki az m_c magasságot!

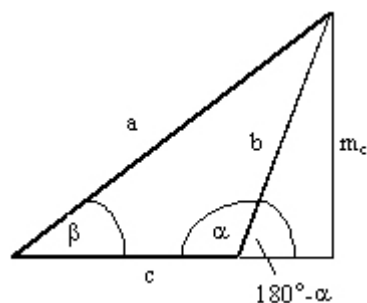
$$m_c = a \sin \beta$$

$$m_c = b \sin \alpha$$

A bal oldalak egyenlőségéből következik:

$$a \sin \beta = b \sin \alpha$$

- *tompaszögű háromszög esetén*



Fejezzük ki az m_c magasságot!

$$m_c = a \sin \beta$$

$$m_c = b \sin (180^\circ - \alpha)$$

A bal oldalak egyenlőségéből következik:

$$a \sin \beta = b \sin (180^\circ - \alpha)$$

Mivel

$$\sin (180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

ezért

$$a \sin \beta = b \sin \alpha$$

Mindkét esetben ugyanazon összefüggéshez jutottunk.

Rendezés után:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

A háromszög másik két oldalára is felírható ugyanez az arány:

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

A két arány egyben is felírható:

$$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$$

- b) Bármely háromszögben az oldalak úgy aránylanak egymáshoz mint a szemközti szögek szinusza.

$$T = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \sin \alpha}{2}$$

$$a \cdot b \cdot \sin \gamma = b \cdot c \cdot \sin \alpha$$

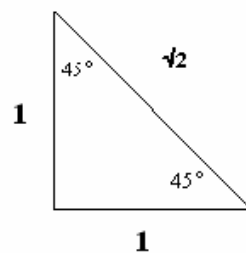
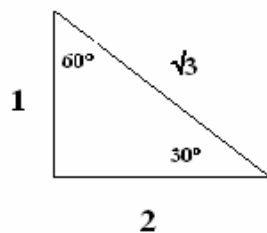
$$a \cdot \sin \gamma = c \cdot \sin \alpha$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$$

$$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$$

5. Alkalmazás:

- Nevezetes szögek szögfüggvénye



$$\begin{array}{llll} \sin 30^\circ = \frac{1}{2} & \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} & tg 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} & ctg 30^\circ = \sqrt{3} \\ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} & \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} & tg 45^\circ = 1 & ctg 45^\circ = 1 \\ \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} & \cos 60^\circ = \frac{1}{2} & tg 60^\circ = \sqrt{3} & ctg 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{array}$$

- Területszámítás
- Felületszámítás
- Erők vektori felbontása
- Szerkesztések
- Térképészeti
- Csillagászat
- Építkezés