16. Tétel
Húrnégyszögek, érintőnégyszögek, szimmetrikus négyszögek

A témakör tartalmi felépítése:

- Definíciók
- Tételek
- Alkalmazások

Történeti bevezető:

A geometria a matematika térbeli törvényszerűségek, összefüggések leírásából kialakult ága; maga a geometria szó görögül földmérést jelentett. Kialakulásában szerepet játszott az ókori gazdasági rendszer (innen ered a terület- és térfogatszámítás) és csillagászat is. A geometria az i. e. V. század körül elszakadt tapasztalati gyökereitől, az eleata filozófusok (leginkább Zénon) és olyan tudósok, mint Thalész hatására. A geometria az első tudományág, amit deduktív módon, vagyis axiómarendszer formájában építettek fel (ez elsősorban Euklidész nevéhez fűződik).

Definíciók:

- Azokat a konvex négyszögeket, amelynek oldalai egy körnek húrjai, húrnégyszögeknek nevezzük.
  Pl.: A nevezetes négyszögek közül a négyzet, a téglalap, a tengelyesen szimmetrikus trapéz (húrtrapéz) és a derékszögű deltoid húrnégyszög.
- Azokat a konvex négyszögeket, amelynek oldalai egy körnek érintői, érintőnégyszögeknek nevezzük.
  Pl.: Nevezetes négyszögek közül érintőnégyszög a négyzet, a rombusz és a deltoid. A szimmetrikus trapéz csak abban az esetben, ha magassága mértani közepe párhuzamos oldalai hosszának.
- Azokat a négyszögeket, amelyeknek van legalább egy szimmetriatengelyük, szimmetrikus négyszögeknek nevezzük.

a) Tengelyesen szimmetrikus:

- **húrtrapéz**
  két párhuzamos oldaluk van
  száraik egyenlők
  1 szimmetriatengely: párhuzamos oldalra merőlegesen
- **deltoid**
  két-két szomszédos oldaluk egyenlő
  átlóik derékszöget zárnak be egymással
  1 szimmetriatengely: az egyik átló

b) Középpontosan szimmetrikus:

- **paralelogramma**
  szemközti oldalai párhuzamosak és egyenlők
  szemközti szögei egyenlők, egy oldalon fekvők kiegészítő szögpárok
  átlói felezik egymást
  szimmetria középpont: átlóinak metszéspontja

c) Tengelyesen és középpontosan szimmetrikus:

- **rombusz**
  olyan paralelogramma, amelynek minden oldala egyenlő
  2 szimmetriatengely: átlók + szimmetria középpont: átlók metszéspontja
  átlói derékszögben metszik egymást
- **téglalap**
  olyan paralelogramma, amelynek oldalai derékszöget zárnak be egymással
  2 szimmetriatengely: középvonalak + szimmetria középpont: átlók metszéspontja
- **négyzet**
  olyan rombusz, amely téglalap
  4 szimmetriatengely: átlók, középvonalak + szimmetria középpont: átlók metszéspontja

d) Forgásszimmetrikus:

- **kör**
  végtelen sok szimmetriatengely

(A tétel címében szimmetrikus négyszögekről van szó, tehát a forgásszimmetrikus alakzatok nem tartoznak bele.)

Tételek:

- Érintőnégyszögek tétele:

  Bármely érintőnégyszögben a két-két szemközti oldal hosszúságának az összege egyenlő.

  Megfordítás:

  Ha egy konvex négyszögben a két-két szemközti oldal hosszúságának az összege egyenlő, akkor a négyszög érintőnégyszög.

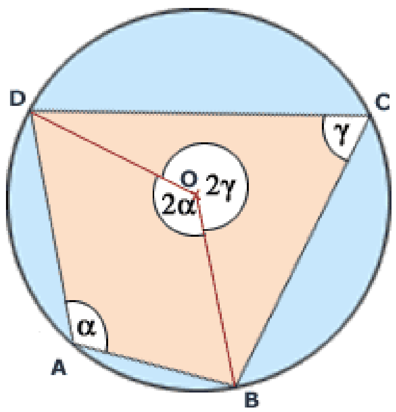
  Egy mondatban:

  Egy konvex négyszög akkor és csak akkor érintőnégyszög, ha a két-két szemközti oldal hosszának összege egyenlő.

- Húrnégyszögek tétele:

  Bármely húrnégyszög két szemközti szögének az összege 180^0.

  Bizonyítás:



Egy húrnégyszög köré írjunk kört.
Kössük össze a négyszög két szemközti csúcsát a kör középpontjával. A jobboldali ábrán a B és D csúcsokat.

A kerületi és középponti szögek tétele értelmében a BAD kerületi szöghöz (a) tartozó BOD középponti szög ennek kétszerese (2a). Ugyanígy, a BCD kerületi szöghöz (g) tartozó BOD középponti szög ennek kétszerese (2g).

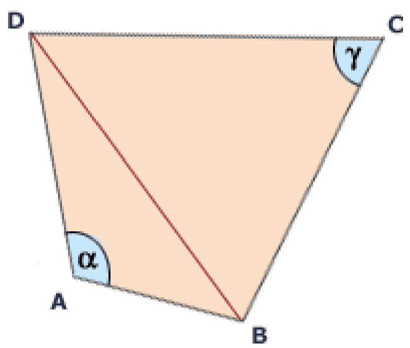
Mivel 2a + 2g = 360°, ezért a + g = 180°

Ezt kellett bizonyítani.

Megfordítás:

Ha egy négyszög szemközti szögeinek összege 180°, akkor az húrnégyszög.

Bizonyítás:

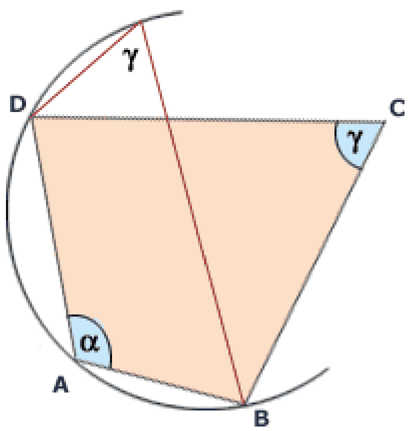


Tekintsük az ABCD négyszöget, amelynek szemközti szögeinek összege 180°. Vegyük a mellékelt ábrát, $\alpha + \gamma = 180°$

Kössük össze az B és D csúcsokat, az α és a γ szögekkel szemközti átlót.

Húzzuk meg az ABD háromszög köréírt körét. Ilyen mindig van. Azt még nem bizonyítottuk, hogy ez átmegy-e a negyedik C csúcson.

Jelöljük ki ennek a körívnek tetszőleges C' pontját a B és D pontok között (A BD átló azon oldalán, ahol a C pont van). Az ABC'D négyszög húrnégyszög, ezért a C' csúcsnál lévő szög az α szög kiegészítő szöge, tehát a BC'D szög = γ.



Mivel az összes olyan pont, amelyből a BD átló γ szög alatt látszik, a BD átlóhoz tartozó szimmetrikus látóköríveken van, ezért a C pontnak szintén ugyanezen köríveken valamelyikén kell lenni. Csak az a körív jöhet szóba, amelyik a BD átlónak az A csúccsal ellentétes oldalán van. A másik látóköríven nem lehet, mert akkor az ABCD négyszög nem konvex, hanem konkáv lenne.

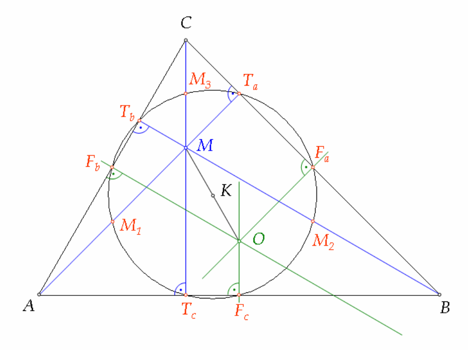
<u>Alkalmazások</u>:

1. *Matematikán belüli alkalmazás:*
   - Igazoljuk, hogy egy háromszög magasságpontjának az egyik oldal egyenesére vonatkozó tükörképe a háromszög köré írt körön van!
   - Igazoljuk, hogy egy háromszög magasságpontjának az egyik oldal felezéspontjára vonatkozó tükörképe a háromszög köré írt körön van!
   - Feuerbach-körre vonatkozó tétel.

     A geometriában a **Feuerbach-kör** vagy „a kilenc pont köre” egy nevezetes kör, amely bármely háromszöghöz megszerkeszthető. Kilenc nevezetes ponton megy át, melyek közül hat a háromszög oldalain található, ha a háromszög nem tompaszögű.

Ezek:

- a háromszög oldalfelező pontjai,
- a háromszög magasságainak talppontjai,
- a magasságpontot a csúcsokkal összekötő szakaszok felezőpontjai.



2. *Matematikán kívüli alkalmazás:*
   - Tegyük fel, hogy egy ásatáson találnak négy kőtömböt, melyekről feltételezik, hogy egy kör alakú építmény falának része. Könnyen meg lehet állapítani, hol van az építmény középpontja és így annak falának pontos helyét.

<u>Kidolgozója</u>: *Balogh Tamás 12.D*