

16. Tétel

Húrnégyszögek, érintőnégyyszögek, szimmetrikus négyszögek

1. Bevezetés:

Tartalmi felépítés:

- Történeti áttekintés
- Definíciók
- Tételek (és a húrnégyszögekre vonatkozó bizonyítása)
- Alkalmazások (és az egyik részletesebb kifejtése)

2. Történeti áttekintés:

A **geometria** a matematika térbeli törvényszerűségei, összefüggések leírásából kialakult ága; maga a *geometria* szó görögül eredetileg *földmérést* jelentett. Kialakulásában szerepet játszott az ókori gazdasági rendszer (innen ered a terület- és térfogatszámítás), és csillagászat is. A geometria az i.e. V. század körül elszakadt tapasztalati gyökereitől, az eleata filozófusok (leginkább Zénón) és olyan tudósok, mint Thalész hatására. A geometria az első tudományág, amit deduktív módon, vagyis axiómarendszer formájában építettek fel (ez elsősorban Euklidész nevéhez fűződik).

3. Definíciók:

- **Azokat a konvex négyszögeket, amelynek oldalai egy körnek húrjai, húrnégyszögeknek nevezzük.**

Pl.: A nevezetes négyszögek közül a négyzet, a téglalap, a tengelyesen szimmetrikus trapéz (húrtrapéz) és a derékszögű deltoid húrnégyszög.

- **Azokat a konvex négyszögeket, amelynek oldalai egy körnek érintői, érintőnégyyszögeknek nevezzük.**

Pl.: Nevezetes négyszögek közül érintőnégyyszög a négyzet, a rombusz és a deltoid. A szimmetrikus trapéz csak abban az esetben, ha magassága mértani közepe párhuzamos oldalai hosszának.

- **Azokat a négyszögeket, amelyeknek van legalább egy szimmetriatengelyük, szimmetrikus négyszögeknek nevezzük.**

a) Tengelyesen szimmetrikus:

- **húrtrapéz**
két párhuzamos oldaluk van
száraik egyenlők
1 szimmetriatengely: párhuzamos oldalra merőlegesen
- **deltoid**
két-két szomszédos oldaluk egyenlő
átlóik derékszöget zárnak be egymással
1 szimmetriatengely: az egyik átló

b) Középpontosan szimmetrikus:

- **paralelogramma**
szemközti oldalai párhuzamosak és egyenlők
szemközti szögei egyenlők, egy oldalon fekvők kiegészítő szögpárok
átlói felezik egymást
szimmetria középpont: átlóinak metszéspontja

c) Forgásszimmetrikus: pl. négyzet, téglalap

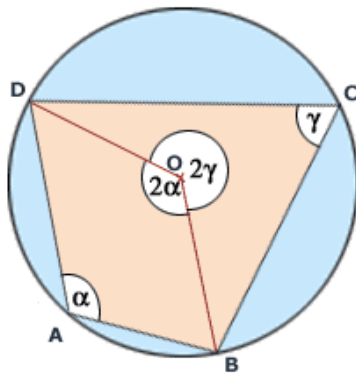
d) Tengelyesen és középpontosan szimmetrikus:

- **rombusz**
olyan paralelogramma, amelynek minden oldala egyenlő
2 szimmetriatengely: átlók + szimmetria középpont: átlók metszéspontja
átlói derékszögben metszik egymást

- **téglalap**
olyan paralelogramma, amelynek oldalai derékszöget zárnak be egymással
2 szimmetriatengely: középvonalak + szimmetria középpont: átlók metszéspontja
- **négyzet**
olyan rombusz, amely téglalap
4 szimmetriatengely: átlók, középvonalak + szimmetria középpont: átlók metszéspontja

4. Tételek:

- **Érintőnéyszögek tétele és megfordítása:** Egy konvex négyszög akkor és csak akkor érintőnéyszög, ha 2-2 szemközti oldalának összege egyenlő.
- **Húrnégyszögek tétele:** Bármely húrnégyszög két szemközti szögének összege 180° .



Egy húrnégyszög köré írjunk kört.

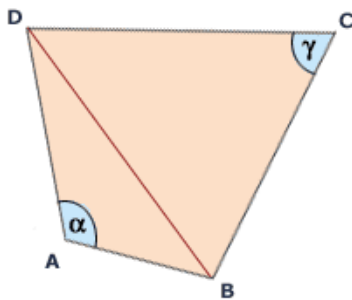
Kössük össze a négyszög két szemközti csúcsát a kör középpontjával. A jobboldali ábrán a B és D csúcsokat.

A kerületi és középponti szögek tétele értelmében a BAD kerületi szöghöz (α) tartozó BOD középponti szög ennek kétszerese (2α). Ugyanígy, a BCD kerületi szöghöz (γ) tartozó BOD középponti szög ennek kétszerese (2γ).

Mivel $2\alpha + 2\gamma = 360^\circ$, ezért $\alpha + \gamma = 180^\circ$

Ezt kellett bizonyítani.

Megfordítása: ha egy négyszög szemközti szögeinek összege 180° , akkor a négyszög húrnégyszög.



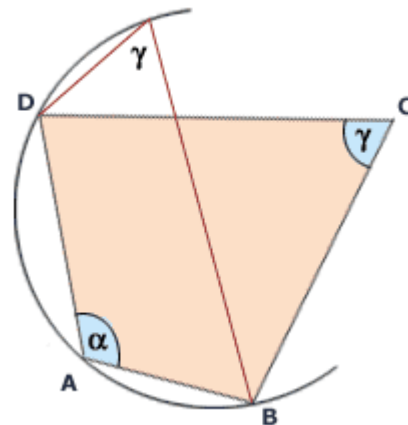
Tekintsük az ABCD négyszöget, amelynek szemközti szögeinek összege 180° . Vegyük a mellékelt ábrát, $\alpha + \gamma = 180^\circ$

Kössük össze az B és D csúcsokat, az α és a γ szögekkel szemközti átlót.

Húzzuk meg az ABD háromszög köréírt körét. Ilyen mindig van. Azt még nem bizonyítottuk, hogy ez átmegy-e a negyedik C csúcson.

Jelöljük ki ennek a körívnek tetszőleges C' pontját a B és D pontok között (A BD átló azon oldalán, ahol a C pont van). Az ABC'D négyszög húrnégyszög, ezért a C' csúcsnál lévő szög az α szög kiegészítő szöge, tehát a BC'D szög = γ .

Mivel az összes olyan pont, amelyből a BD átló γ szög alatt látszik, a BD átlóhoz tartozó szimmetrikus látóköriíveken van, ezért a C pontnak szintén ugyanezen köríveken valamelyikén kell lenni. Csak az a körív jöhet szóba, amelyik a BD átlónak az A csúccsal ellentétes oldalán van. A másik látóköriíven nem lehet, mert akkor az ABCD négyszög nem konvex, hanem konkáv lenne.



5. Alkalmazások:**a) Matematikán belüli alkalmazások:**

1. Igazoljuk, hogy egy háromszög magasságpontjának az egyik oldal egyenesére vonatkozó tükörképe a háromszög köré írt körön van!
2. Igazoljuk, hogy egy háromszög magasságpontjának az egyik oldal felezéspontjára vonatkozó tükörképe a háromszög köré írt körön van!
3. Feuerbach-körre vonatkozó tétel.

b) Matematikán kívüli alkalmazás: Tegyük fel, hogy egy ásatáson találnak négy kőtömböt, melyekről feltételezik, hogy egy kör alakú építmény falának része. Könnyen meg lehet állapítani, hol van az építmény középpontja és így annak falának pontos helyét.

Kidolgozója: Vojts Máté 12.D