18. Tétel

A kör és részei, kör és egyenes kölcsönös helyzete, kerületi szög, középponti szög

1. A témakör tartalmi felépítése

- **Történeti bevezető**
- **Kör és részei (definíciók)**
- **Kör és egyenes helyzete**
- **Kerületi és középponti szögek és kapcsolatuk**
- **Egyéb alkalmazások**

2.1 Történeti bevezető

A **geometria** a matematika térbeli törvényszerűségek, összefüggések leírásából kialakult ága; maga a *geometria* szó görögül eredetileg *földmérés*t jelentett. Kialakulásában szerepet játszott az ókori gazdasági rendszer (innen ered a terület- és térfogatszámítás), és csillagászat is. A geometria az i.e. V. század körül elszakadt tapasztalati gyökereitől, az eleata filozófusok (leginkább Zénón) és olyan tudósok, mint Thalész hatására. A geometria az első tudományág, amit deduktív módon, vagyis axiómarendszer formájában építettek fel (ez elsősorban Euklidész nevéhez fűződik).

2.2 Kör és részei; definíciók:

1. *Kör*: Azon pontok halmaza a síkon, amelyek a sík egy adott *O* pontjától adott *r* távolságra vannak, egy kör (körvonal).

2. *Zárt körlap*: Azon pontok halmaza a síkon, amelyek a sík egy adott *O* pontjától adott *r* távolságnál nem nagyobb távolságra vannak, az *O* középpontú, *r* sugarú *zárt körlap*.

3. *Nyílt körlap*: Azon pontok halmaza a síkon, amelyek a sík egy adott *O* pontjától adott *r* távolságnál kisebb távolságra vannak, az *O* középpontú, *r* sugarú *nyílt körlap*.

4. *Körív*: A kört két pontja két körívre bontja.

5. *Körcikk*: A körlapot két sugara két körcikkre bontja.

6. *Körgyűrű*: A sík azon pontjainak halmaza, amelyek két egyközepű (koncentrikus) kör között helyezkednek el.
   Körszimmetrikus alakzat a körgyűrű.

7. *Kör érintője*: A kör érintője a kör síkjának olyan egyenese, amelynek pontosan egy közös pontja van körrel.

8. *A kör szelője*: A szelő körrel való metszéspontjai közé eső szakasza.

9. *Körszelet*: A körcikk és annak sugarai által közrezárt háromszöglap halmazelméleti különbsége.

10. *Középponti szög*: Ha egy szög csúcsa egy adott kör középpontja, akkor a szöget a kör középponti szögének nevezzük.

11. *Kerületi szög*: Ha egy szög csúcsa egy adott körvonal pontja, szárai pedig vagy a kör két húrjára, vagy egy húrra és egy érintőre illeszkednek, akkor a szöget a kör kerületi szögének nevezzük.

2.3 Kör és egyenes helyzete:

1.Metszi: 2 közös pontjuk van; a közös rész lehet egy egyszerű húr, de speciális esetben, akár átmérő is(ez is húr)

2. Érinti: 1 közös pontjuk van

3. Kitérő: nincs közös pontjuk

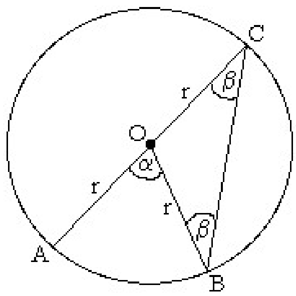
2.4 Tételek – kerületi és középponti szögek és kapcsolatuk:

1. **Látókörív tétel:** A síkon azoknak a pontoknak a halmaza, amelyekből egy adott AB szakasz adott α ($0 < \alpha < 180°$) szög alatt látszik: két, az AB egyenesre szimmetrikusan elhelyezkedő körív (látókörív).

2. **Kerületi és középponti szögek tétele:** Egy körben az azonos ívhez tartozó középponti és kerületi szögek aránya 2 : 1.

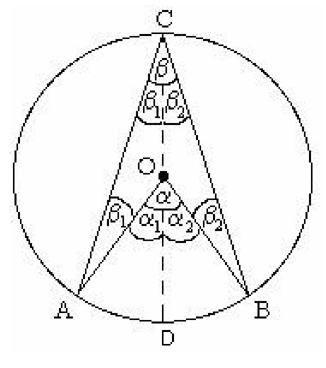
Azaz egy kör adott (AB) ívéhez tartozó kerületi szög (β) feleakkora, mint az ugyanezen (AB) ívhez tartozó középponti szög (α).
Azaz: $\alpha = 2\beta$

Bizonyítás:



(1) A kör középpontja illeszkedik a kerületi szög egyik szárára.

A COB egyenlő szárú háromszögnek az AOB szög külső szöge, ezért:
α = AOB szög = OBC szög + OCB szög = 2β

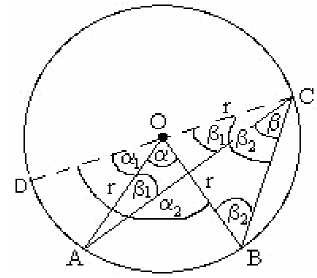


(2) A kör középpontja a kerületi szög szögtartományának belső pontja.

Húzzuk be a kör C pontra illeszkedő átmérőjét, és legyen C-vel átellenes végpontja D. Az AD ás DB íveken nyugvó kerületi és középponti szögek elhelyezkedése az előző esetnek megfelelően:
α_1 = AOD szög = 2 · ACD szög = $2\beta_1$
α_2 = DOB szög = 2 · DCB szög = $2\beta_2$
ahonnan
$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = 2\beta_1 + \beta_2 = 2(\beta_1 + \beta_2) = 2\beta$

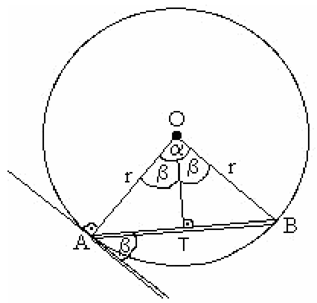
(3) A kör középpontja a kerületi szög szögtartományán kívül van.

Most is rajzoljuk be a CD átmérőt. A DA és DB ívekhez tartozó kerületi és középponti szögek itt is az (1) esetnek megfelelő helyzetben vannak, ezért



α_2 = DOB szög = $2 \cdot$ DCB szög = $2\beta_2$
α_1 = DOA szög = $2 \cdot$ DCA szög = $2\beta_1$
így
$\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = 2\beta_2 - 2\beta_1 = 2(\beta_2 - \beta_1) = 2\beta$

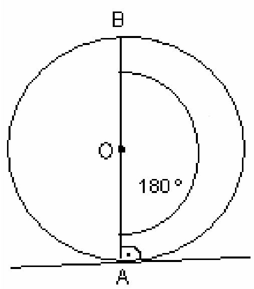
(4) Érintőszárú kerületi szög esetei:



a, $\beta < 90^o$

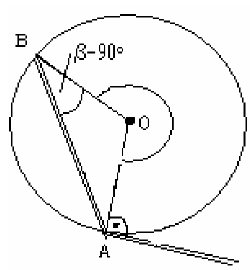
Ha hegyesszög , és OT az AOB egyenlő szárú háromszög alaphoz tartozó magassága, akkor az A csúcsú kerületi szög és az AOT szög merőleges szárú szögek, így AOT szög = β. Mivel OT felezi az AOB szöget, ezért AOB szög = 2β.

b, $\beta = 90^o$



Ha β derékszög, akkor az állítás közvetlen következménye annak a ténynek, hogy az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintőre.

c, $\beta > 90^o$



Ha β tompaszög, akkor az AOB egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögeinek nagysága β-90^o, így a szárak által bezárt szögre:
AOB szög = $180^o - 2(\beta - 90^o) = 360^o - 2\beta$,
amiből adódik, hogy a kijelölt AB ívhez tartozó középponti szög nagysága 2β.

Ezzel befejeztük a bizonyítást, minden egyes esetre beláttuk a középponti é kerületi szögek tételét.

3.: Alkalmazás:

Matematikán belüli:

- Húrnégyszögek tétele
- Érintőnégyszögek tétele
- Szelőtétel
- Thálész tétele
- Szög mérése (ívmérték)
- Látószögkörív meghatározásához, megszerkesztéséhez.
- Testek magasságának meghatározásához.

Egyéb:

- Térképészetben a tengerszintfeletti magasság meghatározásához.
- Műholdak – árnyékolás - látószög

Húrnégyszögek tétele:

Egy húrnégyszög szemben lévő szögeinek összege 180 ^{o}
Bizonyítás: Kerületi és középponti szögek tétele alapján

Érintő négyszögek tétele:

Szemben lévő oldalak összege egyenlő, mert küldő pontból húzott érintő szakaszok hossza ugyancsak egyenlő, és minden csúcsból indul 2-2 érintő, ezek mind másik oldal párhoz tartoznak.
Csúcsokból induló szakaszok: x(A csúcs), y(B csúcs), v(C csúcs), z(D csúcs).
A+c oldalhoz tartozik: egy x, egy y egy v és egy z szakasz. A b+d oldalhoz ugyancsak négy szakasz tartozik: x, y, v és z. Mivel az egyforma betűvel jelölt szakaszok egyenlőek, így belátható, hogy a szembenlévő oldalak összege is egyenlő.

Kidolgozója: *Zalkai Dániel* 12.D