# 19. tétel – Vektorok

A koordinátageometriára jellemző, hogy a geometriai problémákat koordinátarendszerben próbálja megoldani, analitikai, algebrai úton. A koordinátarendszerben vektorok, helyvektorok, és normálvektorok, stb. segítségével oldhatunk meg problémákat.

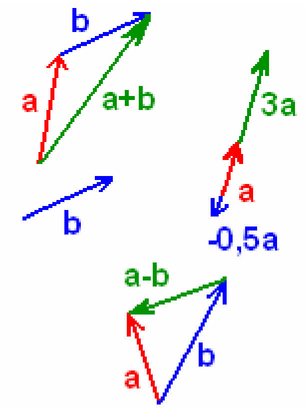
**A felelet vázlata**:
- Alapfogalmak
- Vektorok kölcsönös viszonya
- Vektorműveletek
- Tétel – Bizonyítás
- Alkalmazások

**Alapfogalmak:**

- Vektor: Irányított szakasz. Ha egy szakasz két végpontját megkülönböztetjük egymástól oly módon, hogy az egyik pont a kezdőpont, a másik pont a végpont, akkor irányított szakaszt, vektort kapunk.
- Helyvektorok (a koordinátarendszerben): Olyan vektor, melynek kezdőpontja az origó. Így egy pontot a koordinátarendszerben meg tudunk határozni egy helyvektorral is, a helyvektort koordináta párral jelöljük. Ez a koordináta pár a helyvektor végpontja.
- Vektor hossza: A vektort meghatározó irányított szakasz hossza (abszolútértéke).
- Nullvektor: Olyan vektor, melynek hossza 0, iránya tetszőleges.

**Vektorok kölcsönös viszonya:**
- Párhuzamos: Két vektor párhuzamos, ha az őket meghatározó irányított szakaszok egyenesei párhuzamosak.
- Egyirányúak: Két vektor egyirányú, ha párhuzamosak, és egy irányba mutatnak.
- Ellentétes irányú: Két vektor ellentétes irányú, ha párhuzamosak és különböző irányba mutatnak.
- Egyenlő: Két vektor egyenlő, ha párhuzamosak és abszolútértékeik megegyeznek.
- Ellentett: Két vektor egymás ellentetjei, ha ellentétes irányúak és abszolútértékeik megegyeznek.

**Vektorműveletek:**




- Összeg: Az **a** és **b** vektorok összege (**a**+**b**) azon párhuzamos eltolás vektora, amellyel az **a**-ral és **b**-ral való párhuzamos eltolások egymásutánja helyettesíthető. Tehát ha az **a** végpontjába eltoljuk a **b**-t akkor az **a** kezdőpontjától a **b** végpontjába mutató vektor lesz az összegvektor.
- Különbség: Két vektor különbségén az ellentett vektor hozzáadását értjük. (Az **a** és **b** vektorok különbsége (**a**-**b** = **a**+(-**b**) vektor)
- Konstans szoros szorzat: Ha **a** $\neq$ **0** és ß tetszőleges valós szám, akkor ß**a** olyan vektor, amelynek abszolútértéke |ß||**a**|, és ß > 0 esetén **a**-ral egyirányú, ß < 0 esetén **a**-ral ellentétes irányú.
  Ha **a** = **0**, akkor ß**a** = **0** bármely ß valós szám esetén.

- Skaláris szorzat: Két vektor skaláris szorzatán értjük azt a valós számot, melyet úgy kapunk, hogy a két vektor abszolútértékét és bezárt szögük koszinuszát összeszorozzuk. **ab** = |**a**||**b**| cos α (ahol a α két vektor bezárt szöge).
  Végeredménye nem vektor, hanem valós szám, konstans.
  Ha 0° ≤ α < 90 °, akkor a skaláris szorzat értéke pozitív valós szám.
  Ha 90 ° < α ≤ 180 °, akkor a skaláris szorzat értéke negatív valós szám.
  Ha = 90 ° , akkor cos90 ° = 0 miatt a skaláris szorzat értéke is nulla.
- Vektoriális szorzat: a vektoriális szorzat eredménye egy vektor, ez a művelet csak a térben végezhető el. Az eredményvektor abszolútértékét megkapjuk, ha a két vektor abszolútértékét megszorozzuk a bezárt szögük sinusával. |**a** × **b**| = |**a**||**b**|sinα. Az eredményvektor merőleges lesz mindkét kezdő vektorra, és a 3 vektor jobbkezes koordinátarendszert alkot.

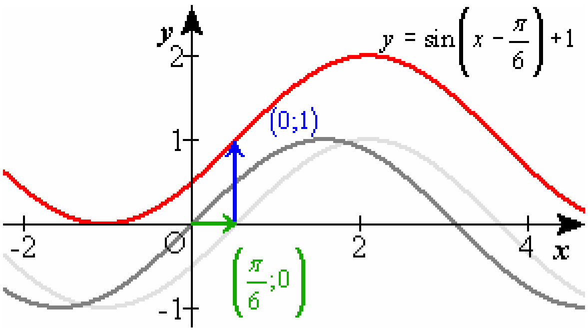
## <u>Tétel - Bizonyítás:</u>

Két vektor skaláris szorzata akkor és csak akkor 0, ha a két vektor merőleges egymásra.

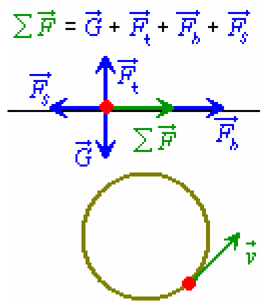
- Ha a két vektor merőleges egymásra, akkor hajlásszögükre α = 90° , így cos90° = 0 miatt a skaláris szorzat értéke is nulla.
- Nézzük most azt az esetet, hogy két vektor skaláris szorzata nulla.
  Ha a vektorok nem nullvektorok, akkor skaláris szorzatuk csak akkor lehet nulla, ha cosα = 0. Ez pedig azt jelenti, hogy α = 90° , azaz a vektorok merőlegesek egymásra.
  Ha a vektorok között nullvektor is szerepel, akkor mivel a nullvektorok iránya tetszőleges, ezért ebben az esetben is mondhatjuk, hogy merőlegesek egymásra.

## <u>Alkalmazások:</u>

- Vektoros bizonyítások: pl. a koszinusztétel bizonyítása.
- Geometriai transzformációk, eltolás vektorral, függvényábrázolásnál. Példa: az




  $f(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+1$ függvényt akarjuk ábrázolni. Ebben az esetben először ábrázolni kell az $f(x)=\sin x$ függvényt, majd el kell tolni a $\left(\frac{\pi}{6};0\right)$, majd a (0;1) vektorral.
- Mechanikai munka kiszámolása.
- Pontszerű testekre ható erők eredőjének kiszámolása: egy pontszerű testre sokféle erő hathat, jelen esetben a gravitációs erő (G), a tartóerő ($F_t$), a húzóerő, amivel húzzuk előre a testet ($F_h$) és a súrlódás ($F_s$). Ebben az esetben, ha ki akarjuk számolni a testre ható erők eredőjét, összegét (ΣF), akkor az erőket, mint vektorokat kell összeadnunk, és az eredő erőt is vektorként kapjuk meg.




- A fizikában előforduló mennyiségeknek egy része vektormennyiség, mint pl. a sebesség, a gyorsulás, tehát ezeknek van nagyságuk és irányuk. Így egy pontszerű, körmozgást végző testnek a sebességét is vektorral tudjuk meghatározni: megkapjuk a test irányát is.
- Csillagászat: égitestek útjának követése, számolások.

<u>Kidolgozója</u>: *Rámi El-Rashid Hassan El-Amin El-Sheikh El-Haseen 12.D*