# 1. tétel:

# Halmazok, halmazműveletek, ezek bemutatása természetes számokkal kapcsolatos problémákon

## 1. A témakör tartalmi felépítése (amiről beszélni szeretnék)

- Halmazelméleti alapfogalmak
- Halmazműveletek és azok tulajdonságai
- Néhány, a természetes számhalmazban felmerült probléma bemutatása
- Egyéb alkalmazások

## 2. A témakör tartalmi felépítésének kifejtése

### 2.1 Történeti bevezető

Az 1870-es években G. Cantor (1845 -1918) a matematikának egy új fejezetét teremtette meg, ezt halmazelméletnek nevezzük. Ő a halmazokat úgy vizsgálta, hogy azokat függetlenítette elemeinek tulajdonságaitól, azoktól elvonatkoztatta. Az a gondolata, hogy a végtelen halmazok között is lehet értelmezni az "ugyanakkora", "kisebb", "nagyobb" fogalmakat, új utat nyitott a matematikában. A halmazelmélet azóta is fejlődik, fogalmai, eredményei a matematika különböző területein hasznosíthatók.

### 2.2 Halmazelméleti alapfogalmak

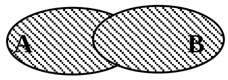
- *halmaz*: alapfogalom, nem definiáljuk;
- *halmaz eleme*: alapfogalom, nem definiáljuk;
- *halmaz megadása*:
  - körülírás: az egyjegyű pozitív páros számok;
  - felsorolás: {2;4;6;8}
  - logikai állítás: $\{x \mid x \in Z^+;\ 0 < x < 10;\ 2 \mid x\}$
- *részhalmaz*: Az A halmaz részhalmaza a B halmaznak, ha A halmaz minden eleme eleme a B halmaznak is. Jelölése: $A \subseteq B$.
- *valódi részhalmaz fogalma*: Az A halmaz részhalmaza a B halmaznak, ha A halmaz minden eleme eleme a B halmaznak is, azonban van B-nek olyan eleme, mely nem eleme A-nak. Jelölése: $A \subset B$.

**Tétel: Az n elemű halmaz részhalmazainak száma $2^n$.**

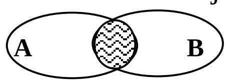
Bizonyítás: Az n elemű halmaz elemeit sorszámozzuk meg egyféleképpen. Ekkor minden egyes részhalmazhoz egyértelműen hozzá tudunk rendelni egy szám n-est a következőképpen: az i. helyen 1 van, ha az i. elem belekerült a részhalmazba és 0, ha nem került bele. Ekkor az is igaz, hogy bármely 0-ből és 1-ből álló szám n-eshez hozzárendelhető egy részhalmaza a halmaznak. Azaz egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést adtunk meg a részhalmazok és a szám n-esek között. Ergo, ha tudjuk a szám n-esek számát, akkor a részhalmazok számát is. Márpedig mivel a szám n-es minden pozíciójába kétféle érték (0 vagy 1) kerülhet, ezért ezekből $2^n$ darab van. Így az n elemű halmaz részhalmazainak a száma is $2^n$.

## 2.2 Halmazműveletek és azok tulajdonságai

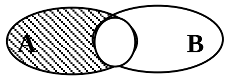
- *két halmaz uniója*: két halmaz metszetén azt a halmazt értjük, aminek elemei az A és B halmaz elemei. Jelölése: $A \cup B$



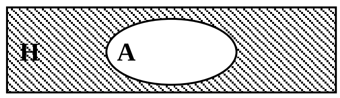

- *két halmaz metszete*: két halmaz metszetén azt a halmazt értjük, aminek elemei az A és B halmaz közös elemei. Jelölése: $A \cap B$



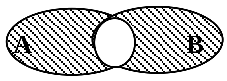

- *két halmaz különbsége*: az A és B halmaz különbségén azt a halmazt értjük, melynek elemei elemei az A halmaznak, de nem elemei a B-nek. Jelölése: A\B.




- *egy halmaz komplementer-halmaza*: Legyen adott egy H alaphalmaz és ennek az A részhalmaza. Ekkor az A komplementer-halmaza a H\A halmaz. Jelölése: $\overline{A}$




- *két halmaz szimmetrikus differenciája:* Az A és B halmaz szimmetrikus differenciáján az A\B és a B\A halmaz unióját értjük. Jelölése: $A \triangle B$




**A metszet és unióképzés tulajdonságai:**

| | | |
|---|---|---|
| $A \cap B = B \cap A$ | kommutatív tulajdonság | $A \cup B = B \cup A$ |
| $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ | asszociatív tulajdonság | $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ |
| $A \cap \emptyset = \emptyset$ | „nullelem” létezése | $A \cup \emptyset = A$ |
| $A \cap A = A$ | – | $A \cup A = A$ |

2. sz. disztributív tulajdonság

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

1. sz. disztributív tulajdonság

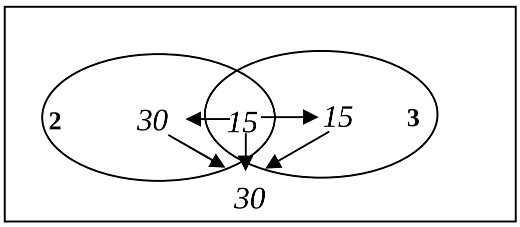
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

## 2.2 Néhány, természetes számhalmazban felmerült probléma bemutatása

- *természetes szám*: a 0 és a pozitív egészeket tartalmazó végtelen elemszámú halmaz

1. Feladat: Határozzuk meg a kétjegyű 2-vel és 3-mal nem osztható természetes számok darabszámát!

Megoldás: Összesen 90 darab kétjegyű természetes szám van (10-től 99-ig). Ebből minden második osztható 2-vel, tehát a számuk 45. 3-mal osztható közül az első a 12 ($a_1$), utolsó a 99 ($a_n$) és egy 3 differenciájú számtani sorozatot alkotnak. Így belőlük 30 darab van. Azok száma, ami páros és 3-mal is osztható ($b_1$=12; $b_n$=96; d=6) 15 darab van, így számuk leolvasható a halmazábrából.




Ebben a halmazábrában bemutatható 2 halmaz metszete, uniója, szimmetrikus differenciája és komplementer-halmaza is.

2. Feladat: Melyek azok az kétjegyű természetes számok, melyre a $\frac{2n-8}{n-10}$ tört értéke nem egész?

Megoldás: $\frac{2n-8}{n-10} = 2 + \frac{12}{n-10}$. Mivel a 2 egész, ezért a $\frac{12}{n-10}$-nek is egésznek kell lennie. Így n+10 illetve n lehetséges értékei: (12 összes osztóját felírva)

| n-10 | -12 | -6 | -4 | -3 | -2 | -1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n | 2 | 4 | 6 | 7 | 8 | 9 | 11 | 12 | 13 | 14 | 16 | 22 |

**Így a feladat megoldása = kétjegyű pozitív természetes számok \ {11;12;13;14;16;22}**

## 2.4 Egyéb alkalmazások halmazokra

- 1. alkalmazás: Határozzuk meg a valós számok azon legbővebb részhalmazát, melyre igaz, hogy $\frac{x+1}{2-x} \geq 1$.

  Megoldás: $\frac{x+1}{2-x} = \frac{2x-1}{2-x} \geq 0$

  1.este:
  $2x-1 \geq 0$ és $2-x > 0$, amiből
  $$M_1 = \left[\frac{1}{2};2\right[$$

  2.este:
  $2x-1 \leq 0$ és $2-x < 0$, amiből
  $$M_2 = \varnothing$$

  $$M_{\text{bruttó}} = M_1 = \left[\frac{1}{2};2\right[$$

- 2. alkalmazás: Legyen adott egy síkban egy P pont és egy tőle 3 cm-re futó e egyenes. Határozzuk meg azon pontok halmazát a síkban, melyek a P ponttól legfeljebb 2 cm-re vannak, de az e egyenestől legalább 4 cm-re!.