20. tétel:

Egyenesek a koordinátasíkon. A lineáris függvények grafikonja és az egyenes. Elsőfokú egyenlőtlenségek.

Témakör tartalmi felépítése

- vonal egyenlete
- egyenes egyenlete és annak megadási lehetőségei
- 2 egyenes párhuzamosságának, illetve merőlegességének szükséges és elégséges feltétele
- elsőfokú egyenlőtlenség
- alkalmazás

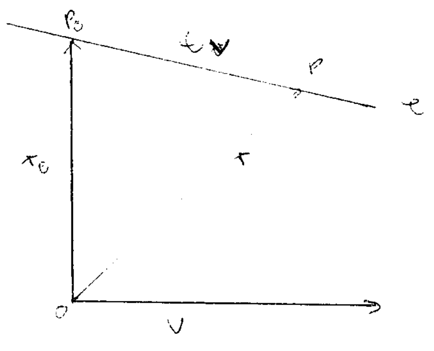
Vonal egyenlete: egy megadott vonal egyenletének olyan egyenletet nevezünk, amelyet a megadott vonal pontjainak és csak a megadott vonal pontjainak koordinátái (helyvektorai) elégítenek ki.

Egy vonal egyenletének keresésekor a vonalat meghatározó adatok és a vonal futópontjának koordinátái (helyvektorai) között keresünk összefüggést.

Egyenes egyenlete

Egy egyenes megadása többféle módon is lehetséges, egyenletének felírási módjára is több változatot ismerünk.

1., Adott ponton áthaladó, adott irányvektorú egyenes egyenlete



Az e egyenest egy P_0 pontjának r_0 helyvektorával és v irányvektorával adjuk meg. Az egyenes futópontja legyen P, ennek helyvektora r.

Az ábrán látszik, hogy az $r = r_0 + t\cdot v$ $(t \in \mathbb{R})$ egyenletet az e egyenes bármely pontjának helyvektora kielégíti és csak az e egyenes pontjaihoz tartozó helyvektorok elégítik ki.

Az egyenest meghatározó adatok:

$r_0 = x_0\cdot i + y_0\cdot j$

$v = v_1\cdot i + v_2\cdot j$

Az egyenes futópontjának helyvektora:

$r = x \cdot i + y \cdot j$

A megfelelő koordináták egyenlőségéből adódó paraméteres egyenletrendszer:

$x = x_0 + t \cdot v_1$

$y = y_0 + t \cdot v_2$

A paraméter kiküszöbölésével kapott egyenlet:

$v_2 \cdot x - v_1 \cdot y = v_2 x_0 - v_1 \cdot y_0$

$\boxed{\text{1. Feladat}}$: Határozzuk meg azon egyenes egyenletét, amely a $P_0(4;3)$ és a $P_1(10;7)$ pontokon halad át.

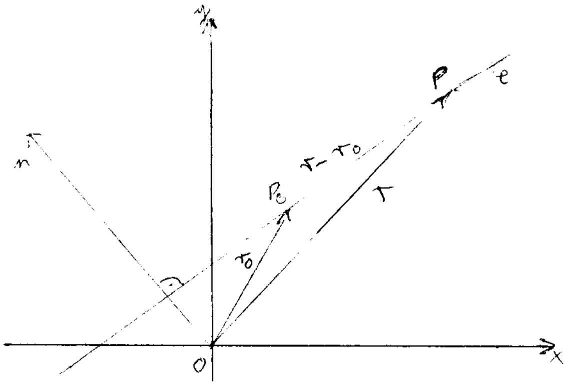
$\underline{v} = \overrightarrow{P_0P_1} : (6;4) \sim (3;2)$

$3y - 2x = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4$

$3y - 2x = 1$

2.) Adott ponton áthaladó, adott normálvektorú egyenes egyenlete

Az (xy) sík e egyenesét egy $P_0(x_0;y_0)$ pontjának $r_0(x_0;y_0)$ helyvektorával és $n(A;B)$ normálvektorával adjuk meg. Az egyenes futópontja $P(x;y)$, ennek helyvektora $r(x;y)$.



Az egyenes $\overrightarrow{P_0P}$ irányvektora és n normálvektora egymásra merőleges, ezért az e egyenes vektoregyenlete.
Ez koordinátákra átírva:

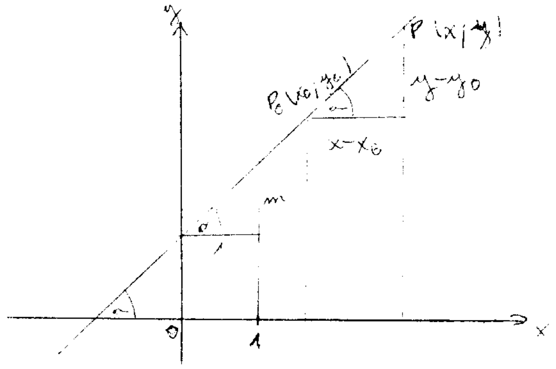
$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) = 0$

$\boxed{\text{2. Feladat}}$: Határozzuk meg azon egyenes egyenletét, amely a $P_0(5;2)$ és a $P_1(7;4)$ pontokon halad át

$\underline{v} = \overrightarrow{P_0P_1} : (2;2) \sim (1;1) \leadsto \underline{n} = (-1;1)$ $\qquad -x + y = -1 \cdot 5 + 1 \cdot 2 = \quad -x + y = -3$

3, Adott ponton áthaladó, adott iránytangensű egyenes egyenlete

Az (xy) sík e egyenesét egy $P_0(x_0;y_0)$ pontjával és m iránytangensével adjuk meg. Az egyenes futópontja $P(x;y)$



$y-y_0=m\cdot(x-x_0)$

Ha az egyenes párhuzamos az y tengellyel, akkor iránytangense nem létezik. A $P_0(x_0;y_0)$ ponton áthaladó és az y tengellyel párhuzamos egyenes egyenlete $x=x_0$

3. Feladat: Határozzuk meg az e egyenes egyenletét a következő adatokból.

$P_0(1;1)$ $\quad tg\, 60° = \frac{v_2}{v_1}=\sqrt{3}$ $\quad \underline{v}:(1;\sqrt{3})$

$\alpha=60°$ $\quad \underline{n}:(-\sqrt{3};1)$

$-\sqrt{3}\,x+y=-\sqrt{3}+1$

4, Egy egyenest 2 pontjával is megadhatunk. A $P_1(x_1;y_1)$ és $P_2(x_2;y_2)$ pont által meghatározott (xy) síkbeli e egyenes.

a, egy irányvektora: $\underline{v}=(x_2-x_1;\ y_2-y_1)$

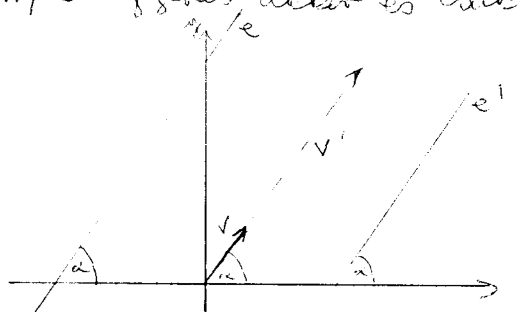
b, egy normálvektora: $\underline{n}=(y_2-y_1;\ x_1-x_2)$

c, iránytangense: $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ $\quad (x_1\neq x_2)$

Az (xy) sík bármely egyenesének az egyenlete elsőfokú kétismeretlenes egyenlet, és fordítva, bármely elsőfokú kétismeretlenes egyenlet az (xy) sík egy egyenesét állítja elő.

Két egyenes párhuzamosságának, illetve merőlegességének szükséges és elégséges feltétele

1, 2 egyenes akkor és csak akkor párhuzamos egymással, ha



a, irányszögük egyenlő

b, irányvektoraik egyállásúak, azaz egyik egyenes irányvektora a másik egyenes irányvektorának konstansszorosa: $v'=c\cdot v$ $\quad (c\neq 0)$

c, mindkettőnek van iránytangense, és azok egyenlők, vagy egyiknek sem létezik iránytangense

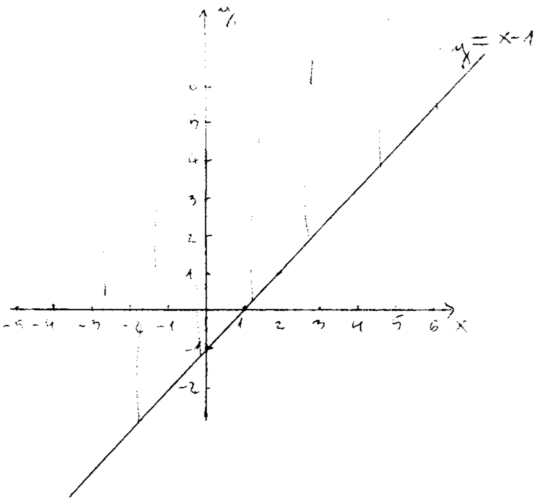
2, 2 egyenes akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha

a, irányvektoraik skaláris szorzata 0, azaz $v \cdot v' = 0$, koordinátákkal $v_1 \cdot v_1' + v_2 \cdot v_2' = 0$

b, irányvektoraik koordinátái között nincs 0, és egyik egyenes iránytangense a másik egyenes iránytangensének ellenkező előjelű reciprok értéke: $m = \frac{-1}{m'}$ (ugyanis $\frac{v_2'}{v_1'} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{-1}{\frac{v_2}{v_1}}$, vagy ha az egyiknek nem létezik iránytangense és a másiknál pedig $m = 0$.

Elsőfokú egyenlőtlenség:

Azok a pontok, amelyek helyettesítési értéke nagyobb mint az egyenlet által meghatározott pontok, azok az egyenes fölött vannak, amelyeknek pedig kisebb a helyettesítési értéke, azok pedig az egyenes alatt.

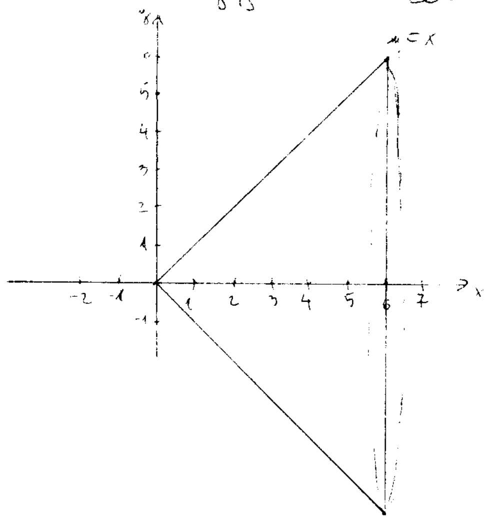


$\cancel{x+y} = 1$ $\quad y = x-1$

$y > x-1$

Alkalmazás:

$\boxed{\text{4. Feladat}}$: Adott az $x = y$ egyenletű egyenes. Ezt megforgatjuk az x tengely körül. Mekkora az így keletkezett kúp térfogatát a $[0; 6]$ intervallumon.



$$\pi \int_0^6 x^2 \, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^6 = 72 - 0 = 72\pi \text{ egység}^3$$