21. tétel – A kör és a parabola a koordinátasíkon

A koordinátageometriára jellemző, hogy a geometriai problémákat koordinátarendszerben próbálja megoldani, analitikai, algebrai úton. A koordinátarendszerben egyeneseket és görbéket egy egyenlet segítségével lehet megadni. Azok a pontok, és csak azok a pontok koordinátái elégítik ki az egyenletet, amelyek illeszkednek az egyenesre vagy a görbére.

A felelet vázlata:

- Alapfogalmak
- A kör a koordinátasíkon
- A kör kölcsönös viszonya más alakzatokkal
- A parabola a koordinátasíkon
- A parabola viszonya más alakzatokkal
- Alkalmazások

Alapfogalmak:

- Görbe: azon pontok halmaza, amelyek egy folytonos egydimenziós alakzatot alkotnak.
- Kör: azon pontok halmaza a síkban, amelyek egy O ponttól azonos r távolságra vannak.
- Kör, mint kúpszelet: ha egy mindkét irányban végtelen egyenes forgáskúp palástot elmetszünk egy S síkkal, amely nem megy át a kúp csúcspontján és merőleges a kúp tengelyére, a kapott metszetgörbe egy kör.
- Parabola: azon pontok halmaza a síkban, amelyek egy v vezéregyenestől (direktrix) és egy arra nem illeszkedő F fókuszponttól egyenlő távolságra vannak.
- Parabola, mint kúpszelet: ha egy mindkét irányban végtelen egyenes forgáskúp palástot elmetszünk egy S síkkal, amely nem megy át a kúp csúcspontján, és párhuzamos a kúp egyik alkotójával, a kapott metszetgörbe egy parabola.
- Érintő: egy kör vagy egy parabola érintőjének azt az egyenest nevezzük, amelynek egy közös pontja van a körrel/parabolával (parabola esetén ez az egyenes nem lehet párhuzamos a parabola tengelyével).
- Kúpszelet: ha egy mindkét irányban végtelen egyenes forgáskúp palástot elmetszünk egy S síkkal, akkor kúpszeletet kapunk. Speciális kúpszeletek a kör, az ellipszis, a parabola és a hiperbola. A kúpszeletek, mint görbék leírhatók egyenlettel a koordinátasíkon.

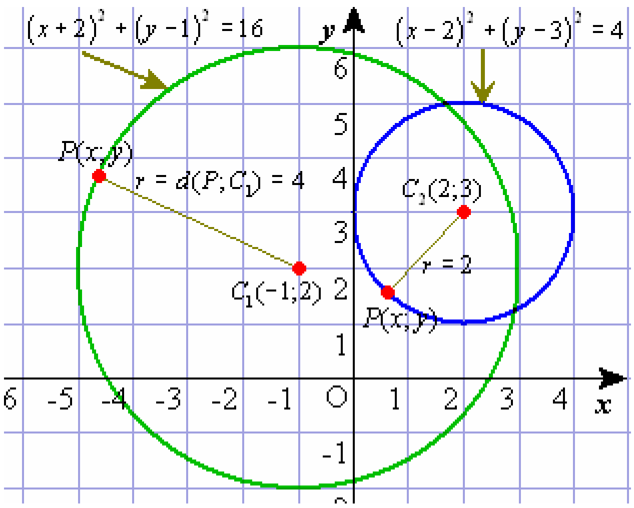
A kör a koordinátasíkon:

Tétel: a C(u;v) középpontú, r sugarú kör egyenlete $\mathbf{(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2}$
Bizonyítás: A körvonalon lévő bármely P(x;y) pont a C(u;v) ponttól r (r>0) távolságra található. A két pont távolságára vonatkozó összefüggés alapján:

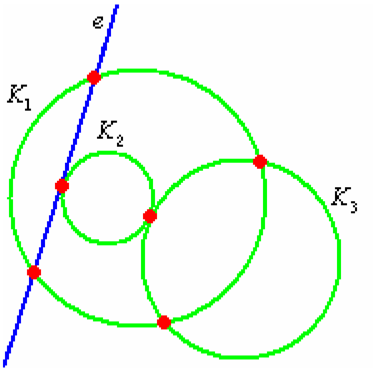
$$\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}=r$$

A négyzetre emelés ekvivalens átalakításnak tekinthető, mivel mindkét oldal pozitív.

$(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2$

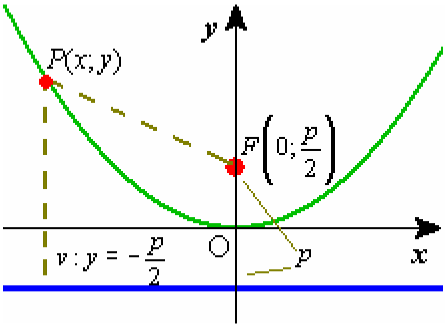


Kör és egyenes, ill. 2 kör kölcsönös helyzete a koordinátasíkon:



Egy egyenesnek lehet 0 közös pontja a körrel (e; K_3), ebben az esetben az egyenes és a kör egyenleteiből származó egyenletrendszernek nincs megoldása a valós számok halmazában. Az egyenes érintheti (e; K_2), vagy metszheti a kört (e; K_1), ilyenkor 1, ill. 2 közös pont van. Hasonlóképp lehet két körnek is 0 közös pontja (K_1; K_2). Ha a két körnek van 1 (K_2; K_3), vagy 2 közös pontja (K_1; K_3), akkor e pontok koordinátáit a két alakzat egyenleteiből származó másodfokú egyenletrendszer gyökei határozzák meg.

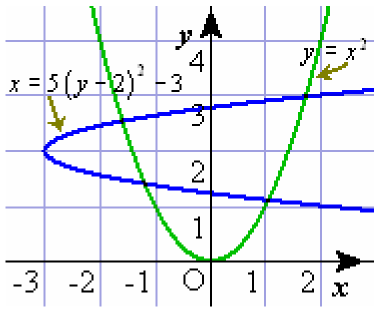
A parabola a koordinátasíkon:



Tétel: a p paraméterű, $F\left(0;\dfrac{p}{2}\right)$ fókuszpontú parabola egyenesének egyenlete $y=\dfrac{1}{2p}x^2$.

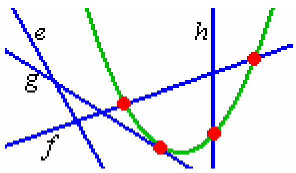
Bizonyítás: A parabola tengely egyenese az Y tengely, fókuszpontja illeszkedik az Y tengely pozitív felére, így vezéregyenesének egyenlete $y=-\dfrac{p}{2}$. A P(x;y) pontok illeszkednek a parabolára, így a definíció, és a 2 pont távolságára vonatkozó összefüggés alapján

$\sqrt{(x-0)^2+\left(y-\dfrac{p}{2}\right)^2}=y+\dfrac{p}{2}$. Négyzetre emelve: $x^2+y^2-py+\left(\dfrac{p}{2}\right)^2=y^2+py+\left(\dfrac{p}{2}\right)^2$. Rendezve $y=\dfrac{1}{2p}x^2$. A többi parabola egyenletét a tengely egyeneseik szerint hasonló módon lehet meghatározni (kivéve a ferde paraboláét, melyről még később tárgyalunk ☺)



Parabola és egyenes helyzete:

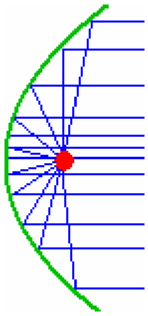
A parabola és egyenes lehet



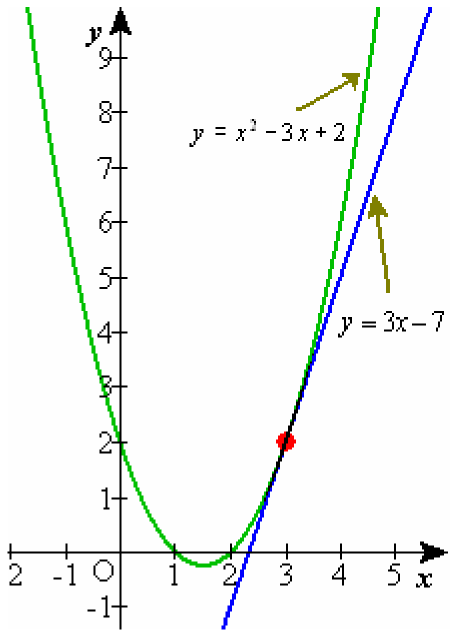
- Kitérő (e): ilyenkor nincs közös pontjuk, nincs olyan x és y a valós számok halmazában, mely kielégíti a parabola és az egyenes egyenletét egyszerre.
- Metsző (f): a két közös pont koordinátáját a parabola és az egyenes egyenleteiből származó másodfokú egyenletrendszer gyökei határozzák meg.
- Érintő (g): egy közös pont van, a parabola érintő egyenesei mindig a parabolán kívül helyezkednek el.
- Az egyenes lehet párhuzamos a parabola tengelyével (h), ilyenkor metszi, de egy közös pontjuk van.

<u>Alkalmazások:</u>

- Szélsőérték feladatok.
- Fizika: körmozgás (kör), vízszintesen elhajított test (parabola)



  - Hő fókuszáló parabolatükör: A parabola keresztmetszetű tükör belsejébe érkező, annak tengely egyenesével párhuzamos fénysugarak a fókuszpontba tükröződnek, így ott összegyűjthető a hő.
  - Parabola antenna, fényszóró: hasonló elv alapján működnek, csak itt a fókuszpontból induló fénysugarakat tükrözi a parabola párhuzamosan a tengelyével, így nagy intenzitású fénysugár vagy rádióhullám hozható létre.

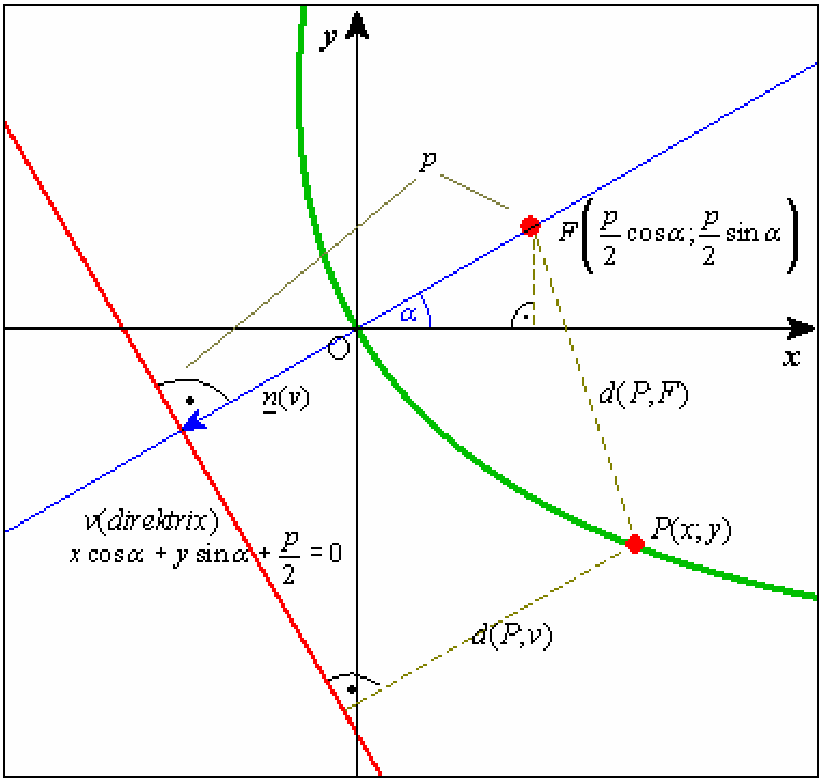


- Csillagászat: e gy üstökös vagy egy égitest kör/parabola pályán keringhet ☺
- Húzzunk érintőt az $y = x^2 - 3x + 2$ egyenletű parabolához az $x_0 = 3$ pontban. Az egyenes egyenletét iránytangenses alakjával kaphatjuk meg: $y = m(x - x_0) + y_0$. Ebben az esetben x_0-t megadtuk, $y_0 = 3^2 - 3 \times 3 + 2 = 2$. Az egyenes meredeksége, iránytangense (m) megkapható, ha x_0 pontban deriváljuk a parabola egyenletét.
  $f'(x) = 2x - 3$.
  $m = 2 \times 3 - 3 = 3$.
  Tehát az egyenes egyenlete:
  $y = 3(x - 3) + 2$.
  $y = 3x - 7$.

- **A ferde parabola egyenletének levezetése (kiegészítő anyag ☺)**

Tétel: a ferde parabola egyenlete: $x^2+y^2=2p(x\cos\alpha+y\sin\alpha)+(x\cos\alpha+y\sin\alpha)^2$

Bizonyítás:



Legyen adott egy ferde parabola, amelynek a tengelyegyenese α szöget zár be az X tengellyel. Így a fókuszpont, a trigonometrikus összefüggések alapján $F\left(\frac{p}{2}\cos\alpha;\frac{p}{2}\sin\alpha\right)$. A vezéregyenes egyenlete kiszámolható (balra).

$$v:\underline{n}=\left(-\frac{p}{2}\cos\alpha;-\frac{p}{2}\sin\alpha\right)$$

$$-\frac{p}{2}\cos\alpha\cdot x-\frac{p}{2}\sin\alpha\cdot y=\frac{p^2}{4}\cos^2\alpha+\frac{p^2}{4}\sin^2\alpha$$

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=\frac{p}{2}$$

A P(x;y) pontok a ferde parabolára illeszkednek. A parabola definíciója, a pont és egyenes távolságának, valamint a két pont távolságának összefüggéseit felhasználva a parabola egyenlete kiszámolható:

$$d(P;F)=\sqrt{(x-\frac{p}{2}\cos\alpha)^2+(y-\frac{p}{2}\sin\alpha)^2}$$

$$d(P;v)=\frac{x\cos\alpha+y\sin\alpha+\frac{p}{2}}{\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}}$$

$$d(P;F)=d(P;v)\Rightarrow\sqrt{(x-\frac{p}{2}\cos\alpha)^2+(y-\frac{p}{2}\sin\alpha)^2}=\frac{x\cos\alpha+y\sin\alpha+\frac{p}{2}}{\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}}$$

$$x^2-px\cos\alpha+\frac{p^2}{4}\cos^2\alpha+y^2-py\sin\alpha+\frac{p^2}{4}\sin^2\alpha=x^2\cos^2\alpha+y^2\sin^2\alpha+\frac{p^2}{4}+px\cos\alpha+py\sin\alpha+2x\cos\alpha\cdot y\sin\alpha$$

$$x^2+y^2+\frac{p^2}{4}(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=\frac{p^2}{4}+2px\cos\alpha+2py\sin\alpha+x^2\cos^2\alpha+y^2\sin^2\alpha+2x\cos\alpha\cdot y\sin\alpha$$

$$\underline{x^2+y^2=2p(x\cos\alpha+y\sin\alpha)+(x\cos\alpha+y\sin\alpha)^2}$$

Kidolgozója: *Rámi El-Rashid Hassan El-Amin El-Sheikh El-Haseen 12.D*