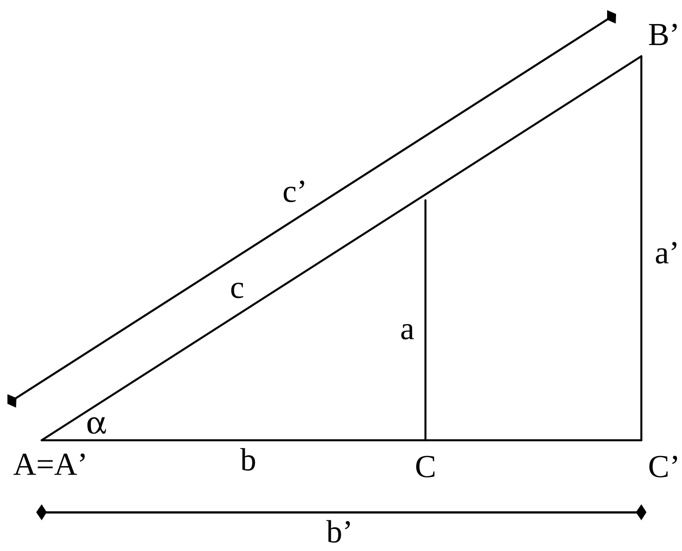
22. tétel: Szögfüggvények értelmezése a valós számhalmazon, ezek tulajdonságai, kapcsolatok ugyanazon szög szögfüggvényei között.

Tartalomjegyzék:

(Ábrákat mindenki rajzoljon szabadkézzel)

1.-Történet: A szögfüggvényeket tartalmazó első írásos emlék Ptolemaiosznak a 2. században élt alexandriai tudósnak Almagest című könyve. Valószínű azonban hogy már Mezopotámiában is használták csillagászati számításokban a szögfüggvényeket.

2. Hegyesszögek szögfüggvényeinek definíciói: Ha két derékszögű háromszög egy-egy hegyesszögében megegyezik akkor a 2 háromszög hasonló. Vagyis megfelelő oldalaik aránya egyenlő. Ezt már több ezer éve felismerték és rájöttek, hogy érdemes az egyes szögekhez tartozó arányokat táblázatba foglalni, így születtek meg már az ókorban az első „szögfüggvény táblázatok”(ma már számológépeket használunk).



ABC háromszög hasonló A’B’C’ háromszöghöz: (szögek egyezése)

Definíciók:

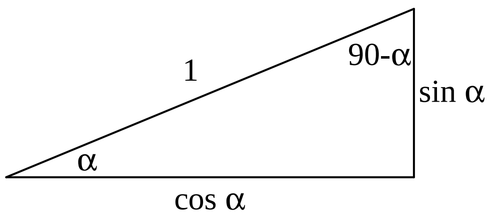
$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{szöggel szemközti befogó}}{\text{átfogó}}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{szög melletti befogó}}{\text{átfogó}}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{szöggel szemközti befogó}}{\text{szög melletti befogó}}$$

$$ctg\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{szög melletti befogó}}{\text{szöggel szemközti befogó}}$$

Nevezetes összefüggések:



$$\frac{a}{b}=\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Pótszögekre vonatkozó összefüggések:
Tétel: Hegyesszög szinusza megegyezik pótszögének koszinuszával.
Hegyesszög tangense megegyezik pótszögének kotangensével.

$\sin(90-\alpha)=\cos\alpha$

$\cos(90-\alpha)=\sin\alpha$

$\operatorname{tg}(90-\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha$

$\operatorname{ctg}(90-\alpha)=\operatorname{tg}\alpha$

TÉTEL:

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$c^2=a^2+b^2$ (Pitagorasz-tétel)

$$\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}=1$$

$(\sin\alpha)^2+(\cos\alpha)^2=1 \;\Rightarrow\; \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

Pitagoraszi azonosság: Adott hegyesszög szinuszának és koszinuszának négyzetösszege 1-el egyenlő.

8. 3. Nevezetes szögfüggvények

Vannak nevezetes szögek, amelyek szögfüggvényének meghatározása könnyen lehetséges. A 30° és 60°szögek szögfüggvényeit a 2 egység oldalú szabályos háromszög segítségével számolhatjuk ki. A 45°szög szögfüggvényeit az egységnyi befogójú derékszögű háromszög segítségével számolhatjuk ki.
Például: sin45°=cos45°=…
tg45°=ctg45°=1
sin30°=cos60°= ½
sin60°=cos30°= …
tg60°=ctg30°= …
tg30°=ctg60°= …

4. Kiterjesztés: A szögfüggvények fogalmát kiterjesztjük tetszőleges forgásszögre.

A derékszögű koordináta rendszerben felveszünk egy egységvektort és nézve annak az x tengely pozitív felével bezárt szögét, mint irányított szöget.

α szöggel elforgatott egységvektor első koordinátája cosα.

α. szöggel elforgatott egységvektor második koordinátája sinα

tgα= sinα/cosα de! cosα nem egyenlő o-val

ctgα= cosα/ sinα de! sinα nem egyenlő 0-val.

tgα másik definíciója az α forgásszög tangense egyenlő a koordinátarendszerben az egységkör (1;0) koordinátájú pontjába húzott érintőből az α szöggel elforgatott vektor meghosszabbítása által levágott előjeles szakaszhosszal. ctgα ugyanígy a (0;1) pontba húzott érintőből az elforgatott vektor meghosszabbítása által levágott előjeles szakasz. (rajzold le az egységkört…!)

A nem hegyesszögek szögfüggvényei visszavezethetőek a hegyesszögek szögfüggvényeire

5.Összefüggések szögfüggvények között

.Pitagoraszi azonosság bármely α –ra igaz. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$-1 \le \sin\alpha \le 1; -1 \le \cos\alpha \le 1$

További következménye a definíciónak. A tg és ctg 180°-ként periodikus. A sin és cos 360°-ként periodikus.

: $\sin(180°-\alpha)= \sin\alpha$; $\cos(180°-\alpha)= -\cos\alpha$

$\sin\alpha= \sin(\alpha+ k360°)$ $\cos\alpha= \cos(\alpha +k360°)$ $\mathrm{tg}\alpha= \mathrm{tg}(\alpha +k180°)$ $\mathrm{ctg}\alpha= \mathrm{ctg}(\alpha+k180°)$

Összefüggések α és –α szögfüggvényei között:

$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$; $\cos(-\alpha)= \cos\alpha$; $\mathrm{tg}(-\alpha)=-\mathrm{tg}\alpha$; $\mathrm{ctg}(-\alpha)= -\mathrm{ctg}\alpha$

6. Radián, mint a szög ívmértéke, trigonometrikus függvények

Szöget nem csak fokban hanem ívmértékben(radiánban) is mérhetünk. Egy körben a középponti szögek és a hozzájuk tartozó körívek hossza egyenesen arányos. Ez az összefüggés lehetőséget nyújt az ívmértékkel való szögmérésre. Az ívmérték egysége az a szög, amelyhez, mint középponti szöghöz a kör sugarával egyenlő hosszúságú körív tartozik. Neve: 1 radián , másképpen: 1 radián az a szög, amelyhez mint középponti szöghöz egység sugarú körben egységnyi hosszúságú körív tartozik.(a szög ívmértéke egy arányszám, amely azt mutatja meg, hogy a szöghöz, mit középponti szöghöz tartozó körív hossza hányszorosa a körív sugarának. Eszerint egység sugarú körben a szög ívmértéke a szöghöz mint középponti szöghöz tartozó körív hossza. Teljes szögív mértéke: 2 π radián)

Minden valós szám tekinthető egy radiánban megadott forgásszögnek ez alapján definiáltuk a trigonometrikus függvényeket.

f(x)= sinx; f(x)= cosx; f(x)=tgx; f(x)=ctgx

grafikonjuk (rajzold magadnak☺)

Jellemzésük: szempontok

ÉT, periódus, zérushelyek, szélsőértékek, korlátosság, monotonitás, paritás, ÉK

7. alkalmazások*:*

- geometria nevezetes tételei
- cosinus-tétel
- $a = 2R \cdot \sin\alpha$ (összefüggés a háromszög oldala, szemközti szög és körülírható kör sugara között. Illetve kör sugara, húrja és a kerületi szög között).

- sinus-tétel $\frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ (a háromszögben összefüggés az oldalak és a szemközti szögek szinusza között.)
- trigonometrikus területképlet: $T_{\Delta}=\frac{ab\cdot\sin\gamma}{2}$

  (négyszögre: $T_{\square}=\frac{e\cdot f\cdot\sin\varphi}{2}$)
- addíciós képletek

+ szögszámítás sík és térgeometriai problémákban

+ építészet, emelkedési szög, depresszió szög, látószög, lejtő %-os emelkedése(tg45°=1 ez a 100%os emelkedésű lejtő, tgα kell %-ban kifejezni)

+fizikai alkalmazás : rezgő mozgás, hullámmozgás leírása, sebesség, kitérés, gyorsulás trigonometrikus leírással adhatók meg, váltakozó feszültség és áram időnek szinuszos függvénye

Matematikán kívüli alkalmazás:
Az egyenletes körmozgást végző pontszerű testnek a körpálya síkjában fekvő, egyenesre eső merőleges vetülete harmonikus rezgő mozgást végez. Ennek a mozgásnak a kitérése az időnek szinuszos függvénye, sebessége, koszinuszos függvénye. $x=A\sin\varpi t$, sebessége : $v(t)=A\varpi\cos\varpi t$. Ahol A= amplitúdó max kitérés, ϖ:körfrekvencia .