23. tétel:

Területszámítás elemi úton és az integrálszámítás felhasználásával

1. A témakör tartalmi felépítése (amiről beszélni szeretnék)

- Alapfogalmak
- Néhány egyszerűbb sokszög területe
- A háromszög területének kiszámítása a T = ab sin γ képlettel
- Az integrál fogalma
- Egyéb alkalmazások
- Egy példa a fizikából

2. A témakör tartalmi felépítésének kifejtése

2.1 Történeti bevezető

A geometria a matematika térbeli törvényszerűségek, összefüggések leírásából kialakult ága; maga a geometria szó görögül eredetileg földmérést jelentett. Kialakulásában szerepet játszott az ókori gazdasági rendszer (innen ered a terület- és térfogatszámítás), és csillagászat is. A geometria az i.e. V. század körül elszakadt tapasztalati gyökereitől, az eleata filozófusok (leginkább *Zénón*) és olyan tudósok, mint *Thalész* hatására. A geometria az első tudományág, amit deduktív módon, vagyis axiómarendszer formájában építettek fel (ez elsősorban *Euklidész* nevéhez fűződik).

2.2 Alapfogalmak

- *Sokszögek területe*: Minden sokszöghöz rendelhetünk egy pozitív számot, amelyet a sokszög területének nevezünk.

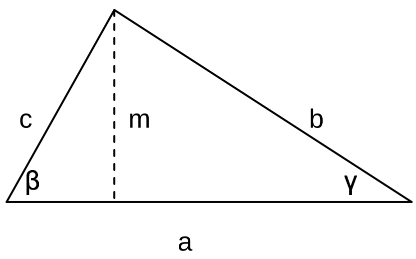
1 A hozzárendeléshez kell egy területegység. Megállapodunk abban, hogy területegység az a négyzet, amelynek oldalai 1 hosszúságegységek.

2 Egybevágó sokszögekhez ugyanazt a számot rendeljük, tehát egybevágó sokszögek területének ugyanaz a mérőszáma.

3 Ha egy sokszöget két (vagy több) sokszögre bontunk, akkor e két (vagy több) sokszög területének összege az eredeti sokszög területével egyenlő.

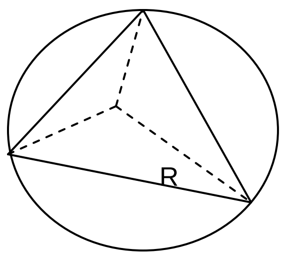
2.3 Néhány egyszerűbb sokszög területe

- *Háromszög:* $T = \frac{am}{2} = \frac{ab\sin\gamma}{2} = \frac{abc}{4R} = sr$ (*r* a beírható kör sugara)

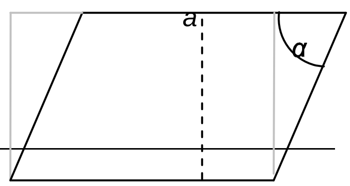


A háromszög területe visszavezethető a paralelogramma területére. ((*am*)/2)
A háromszög területe számolható két oldalából és a közbezárt szög szinuszából. ((*ab* sin*γ*)/ 2)
A háromszög területe számolható 3 oldalából és a köré írt kör sugarából. ((*abc*)/ 4*R*)
A háromszög területe számolható kerületéből és beírható körének sugarából. (*s* = K/2; T = *sr*)
A háromszög területe számolható **Heron-képlettel:**

$$T = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$$



- *Négyzet:* $T = a^2 = \frac{d^2}{2}$ (*d* az átló)
- *Rombusz:* $T = \frac{ef}{2} = a^2 \sin\alpha$ (*α* a kisebbik szög)
- *Téglalap:* T = *ab*

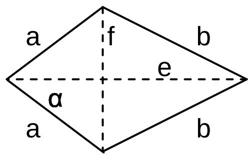


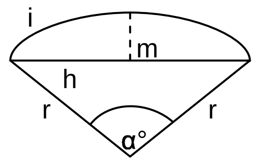
- *Paralelogramma:* T = *am* = *ab* sin*α* (*α* a kisebbik szög) b m

A paralelogramma átdarabolható téglalappá, így területe egy oldal és a hozzá tartozó magassága hosszának szorzata. (*am*)

- *Trapéz:* $T = \frac{a + c}{2} m = km$ (*k* a középvonal)
- *Deltoid:* $T = \frac{ef}{2}$

  A deltoid és a trapéz területe visszavezethető téglalap területének kiszámítására.
- *Húrnégyszög:* $T = \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}$
- *Érintőnégyszög:* $T = sr$
- *Kör:* $T = \pi r^2 = \frac{d^2\pi}{4}$ *Körcikk:* $T = \frac{1}{2}ir = \frac{\pi\,\alpha°}{360°} r^2$ *Körszelet:* $T = \frac{ir - h(r - m)}{2}$

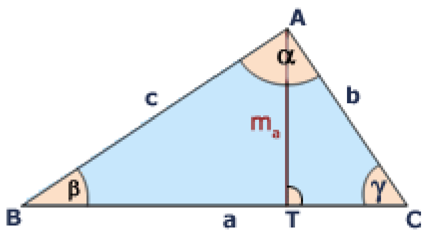




A körcikk területe egyenesen arányos a hozzá tartozó középponti szöggel.
A körszelet területe visszavezethető körcikk és háromszög területének kiszámítására.
$\frac{1}{2}ir - \frac{h\,(r - m)}{2}$

2.3 A háromszög területének kiszámítása a *T = ab sin γ* képlettel

__Tétel:__ *Háromszög területe két oldalból és a közbezárt szög ismertében: T = ab sin γ*



Bizonyítás:

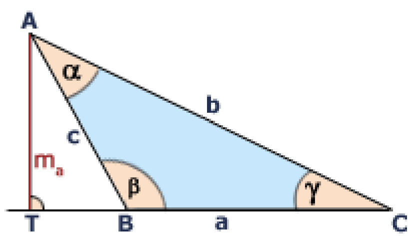
Legyen adott a háromszög két oldala, például *a* és *b*, valamint az általuk közbezárt *γ* szög. Itt három eset lehetséges:

1, a megadott γ szög hegyesszög.

1. A háromszög területét a **t = a* m_a / 2** képlet szerint számítjuk.
2. Most itt adott az **a** oldal, de nem ismert az **m_a** magasság. Adott viszont a **b** oldal.
3. Az ACT derékszögű háromszögben **sin γ = m_a / b**.
   Átrendezve: **m_a = b * sin γ**.
4. Ezt behelyettesítve a területképletbe:
   t = a * b * sin γ / 2

2. a megadott szög tompaszög:

Az ma most az adott *γ* tompaszög külső szögének segítségével fejezhető ki: *ma* = *b* * sin (180°– *γ*), ami alapján:
t = *a* * *b* * sin (180°– *γ*) / 2



Tehát a háromszög területét megkapjuk, ha a két oldalának szorzatát megszorozzuk a közbezárt szög sinusával, és a kapott eredményt osztjuk kettővel.

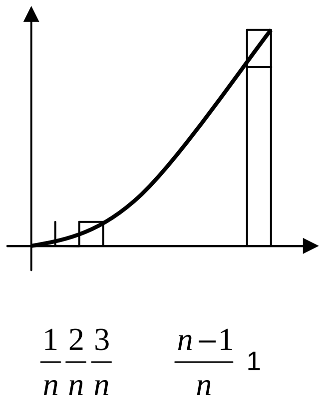
3. a megadott szög derékszög:

Vagyis sin90°= 1, így a képlet alapján: $t = ab/2$

2.4 Az integrál fogalma

A gyakorlati életben sokszor van szükségünk különféle síkidomok „nagyságának” (földterület stb.) meghatározására. Egy mérőszámot kellene hozzákapcsolni a síkidomhoz, amit a területének nevezünk.

1. Tekintsük először azt a síkidomot, amelyet az x tengely [0;1] intervalluma, az x=1 egyenes megfelelő szakasza és az $f:[0;1]\to R$, $f(x)=x^2$ függvény grafikonja határol. Ezt a síkidomot parabolikus háromszögnek is szokás nevezni.



Írjunk a síkidomba és köré sokszögeket a következő módon: osszuk a [0;1] intervallumon n egyenlő részre ($n\in N^+$).

Az $\left[\frac{i-1}{n};\frac{i}{n}\right]$ intervallumra egy beírt és körülírt téglalapot állítsunk úgy, hogy a beírt téglalap magassága $\left(\frac{i-1}{n}\right)^2$, a körülírt téglalap magassága pedig $\left(\frac{i}{n}\right)^2$ legyen. Végezzük el ezt az eljárást minden részintervallumra.

A beírt téglalapok területe:

$$s_n = 0\cdot\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{n}\right)^2\frac{1}{n}+\left(\frac{2}{n}\right)^2\frac{1}{n}+...+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\frac{1}{n}=$$

$$=\frac{1}{n^3}\left[1^2+2^2+...+(n-1)^2\right]=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}$$

A körülírt téglalapok területe:

$$S_n=\left(\frac{1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\left(\frac{2}{n}\right)^2\frac{1}{n}+\left(\frac{3}{n}\right)^2\frac{1}{n}+...+\left(\frac{n}{n}\right)^2\frac{1}{n}=$$

$$=\frac{1}{n^3}\left[1^2+2^2+3^2+...+n^2\right]=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

Arra gondoltunk, hogy ha egyetéen olyan szám van, amely minden s_n-nél nagyobb és minden S_n-nél kisebb, akkor a parabolikus háromszögnek van területe, és a terület azzal a számmal egyenlő.

Világos, hogy $s_n\to\frac{1}{3}$ és $S_n\to\frac{1}{3}$, ha $n\to\infty$.

$$\frac{1}{3}-s_n=\frac{1}{3}-\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}=\frac{3n-1}{6n^2}>0 \text{ és } S_n-\frac{1}{3}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}-\frac{1}{3}=\frac{3n+1}{6n^2}>0$$

Azaz: $s_n\le\frac{1}{3}\le S_n$

Összevetve azt kapjuk, hogy $\frac{1}{3}$ minden s_n és S_n közé esik, és ez az egyetlen ilyen tulajdonságú szám, mivel $S_n - s_n \to 0$, ha $n \to \infty$. Így azt mondjuk, hogy az adott parabolikus háromszögnek van területe, és az $\frac{1}{3}$.

Itt érdemes a Lili tételét is megnézni! ☺

2.6 Egyéb alkalmazások

1. Területszámítás
2. Felszínszámítás
3. Mérnöki munka

2.7 Egy példa a fizikából

Mekkora munkát kell végezni, ha egy *m* tömegű testet a Föld *O* középpontjától *a* távolságra levő *A* pontból, az *O*-tól *b* távolságra lévő *B* pontba akarjuk juttatni $(a < b)$?

A Newton-féle törvény szerint tudjuk, hogy az *m* tömegű testre ható nehézségi erő $F = \gamma\frac{mM}{r^2}$, ahol γ a gravitációs együttható, *M* a Föld tömege, *r* pedig a test távolsága a Föld középpontjától. Az erő tehát a mozgás folyamán változik. O, A, B legyenek egy egyenesen, és osszuk be az [a,b] intervallumot: $a = r_0 < r_1 < r_2 < ... < r_n = b$. Tekintsük az i-edik részintervallumot: $[r_{i-1}; r_i]$. A test r_{i-1}-ből r_i-be való juttatásához több munkát kell végezni, mint $F = \gamma\frac{mM}{r_i^2}(r_i - r_{i-1})$, de kevesebbet, mint $F = \gamma\frac{mM}{r_{i-1}^2}(r_i - r_{i-1})$. Az összes részintervallumra ezt elvégezve azt kapjuk, hogy ha *W* a végzett munka, akkor

$$s_n = \gamma mM\left[\frac{1}{r_1^2}(r_i - r_0) + \frac{1}{r_2^2}(r_2 - r_1) + ... + \frac{1}{r_n^2}(r_n - r_{n-1})\right] <$$

$$W < \gamma mM\left[\frac{1}{r_0^2}(r_1 - r_0) + \frac{1}{r_1^2}(r_2 - r_1) + ... + \frac{1}{r_{n-1}^2}(r_n - r_{n-1})\right] = S_n$$

Ilyen összegekkel már találkoztunk (csak ott *r* helyett *x* szerepelt), és így tudjuk, hogy egyetlen szám van, amely bármely beosztás esetén s_n és S_n közé esik: $\gamma mM\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$. A végzett munka tehát:

$$W = \gamma mM\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right).$$

<u>Kidolgozója</u>: *Hartmann Zsófi 12.D*