23.
Területszámítás elemi úton és az integrálszámítás felhasználásával

Tartalmi felépítés:

1. Területszámítás
2. Speciális síkidomok területe
   - Négyszögek
   - Háromszög
   - Kör
3. Két síkidom területe
4. Integrálszámítás
5. Területszámítással kapcsolatos tételek és bizonyításaik
6. Konkrét példával
7. Alkalmazások

Néhány síkidom területének meghatározásához kész utasítások „képletek” vannak, amelyek egyszerűen alkalmazhatók az igényes gondolkodás azonban azt kívánja, hogy a terület fogalmáról is legyen elképzelésünk, értsük a „képletek” mögötti összefüggéseket is.

1.

Bármely síkidomhoz hozzárendelhetünk egy valós számot (területfüggvény) a következő féleképpen:

a) Minden sokszög területe pozitív valós szám legyen.
b) Az egységnyi oldalhosszúságú négyzet területe 1 területegység.
c) Két egybevágó síkidomhoz ugyanazt a területértéket rendeljük hozzá.
d) Egy síkidomot egymással diszjunkt (nincs közös része) részekre bontva a részek területösszege megegyezik a síkidom területével.

Megállapodás szerint a területegység az a négyzet, amelynek oldalai 1 hosszúságúak.

2.
Speciális síkidomok területe:

Négyszögek

1. Az *a* és *b* oldalhosszúságú téglalap területe *ab*.
2. A paralelogramma átdarabolható téglalappá, tehát területét kiszámolhatjuk egy oldala és a hozzá tartozó magasság szorzatával. ($T=a\cdot m_a$)
3. A trapéz területe visszavezethető a paralelogramma területének kiszámítására. ($T=\frac{(a+c)m}{2}$)
4. A deltoid területének kiszámítása visszavezethető a téglalap területére. ($T=\frac{e\cdot f}{2}$)
5. A szabályos sokszöget területe a háromszöget területének kiszámítására vezethető vissza.

Háromszögek

6. Visszavezethető a paralelogramma területének kiszámítására. (T=$\frac{a \cdot m}{2}$)
   Kiszámíthatjuk a két oldal és a közre zárt szög sinusából. (T=$\frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$)
   Kiszámíthatjuk a Heron-képlettel (T=$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$)
   Kiszámíthatjuk a kerület felének és a beirt kör sugarának szorzatából. (T=rs)

Kör

7. Egy r sugarú kör területe elemi úton: T=r$^2\pi$
   Integrálszámítással: 2 $\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}$ dx
8. Körcikk területe egyenesen arányos a középponti szöggel. (T=$\frac{\widehat{\alpha} \cdot r^2}{2}$)
9. Körszelet területe visszavezethető körcikk és háromszög területének kiszámítására.
10. Ellipszis területe T=π ab

3.
Két síkidom területe:

- Ha két háromszög hasonló, és hasonlóságuk aránya λ, akkor a területük aránya λ^2.
- Két hasonló alakzat esetén, ha a hasonlóság aránya λ, akkor a területük aránya λ^2.

4.
Integrálszámítás, mint területszámítási módszer:

Az $[a;b]$ intervallumon folytonos, nem negatív f(x) függvény görbéje alatti területet a határozott integrál fogalmából következően az $\int_a^b f(x)dx$ képlettel számolhatjuk.

Ha az f(x) folytonos függvényre nincs előjelkikötés, akkor az f(x) integrálja az x tengely
feletti és alatti területek előjeles összegét adja. Ilyenkor az x tengely felett idomok területét pozitív, az x tengely alatti síkidomok területét negatív előjellel vesszük figyelembe

5.
TÉTEL

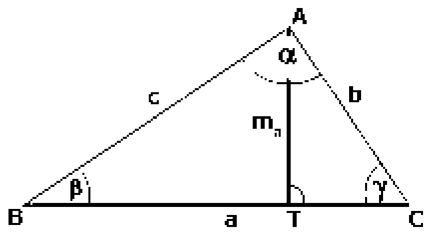
A háromszög területe T=$\frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$.

BIZONYÍTÁS

Legyen adott egy háromszög két oldala, és a közre zárt szögük. (a,b, sinγ)

Így három eset lehetséges:

1.) γ hegyesszög.



A háromszög területét kiszámíthatjuk a T=$\frac{a \cdot m_a}{2}$.

Adott a oldal, de m_a ismeretlen. Viszont adott a b oldal is.

Az ATC derékszögű háromszögből kifejezhetjük m_a-t b segítségével.

Mégpedig: $\sin\gamma = \frac{m_a}{b}$ ⟶ $m_a = b \cdot \sin\gamma$.

Ezt behelyettesítve a területképletbe:

T=$\frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$.

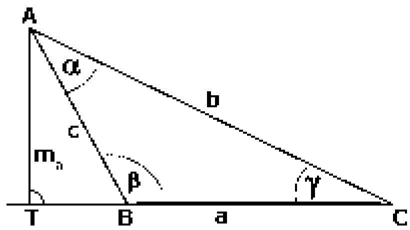
2.) γ tompaszög.

Ebben az esetben ma-t az adott γ szög külső szögének segítségével fejezhetjük ki:

$m_a = b \cdot \sin(180-\gamma)$

tehát:

T=$\frac{a \cdot b \cdot \sin(180° - \gamma)}{2}$



Tehát a háromszög területét kiszámíthatjuk, ha a két oldal és közre zárt szögük sinusának szorzatát elosztjuk kettővel.

3.) γ derékszög.

Vagyis sin90° =1, tehát a területképlet T=$\frac{a \cdot b}{2}$.

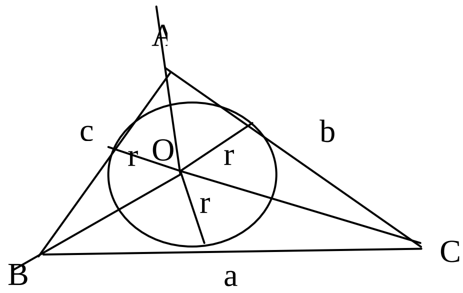
(vagy)
TÉTEL:
A háromszög területe T=rs.

BIZONYÍTÁS:

Ha az ABC háromszög beírt körének középpontját összekötjük az A,B,C csúcsokkal, akkor az eredeti háromszöget három kis háromszögre bontottuk fel. Nyilvánvaló, hogy a három kis háromszög területének összege az eredeti háromszög területét adja.

A felbontásból következik, hogy az AOB, BOC, COA kis háromszögeknek a c,a,b oldalakhoz tartozó magasságai a beírt körnek az r sugarai. Így az ABC háromszög területére felírhatjuk:

T= $\frac{a\cdot r}{2}+\frac{b\cdot r}{2}+\frac{c\cdot r}{2}=\frac{r(a+b+c)}{2}$



$\frac{a+b+c}{2}$ = s (azaz a háromszög kerületének a fele.)

Tehát: T=rs.

6.
KONKRÉT PÉLDA

Legyen adott a háromszög három oldalának hossza.
a = 3 cm, b = 4 cm, c = 5 cm.

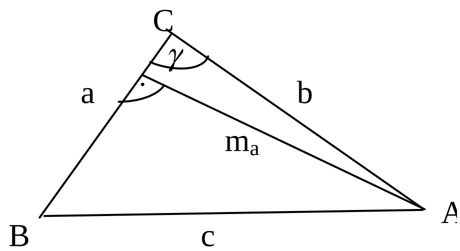
Héron képlet alkalmazásával könnyen kiszámíthatjuk ebből a három adatból a területet:

s= $\frac{3+4+5}{2}$ = 6 cm.

T= $\sqrt{6(6-3)(6-4)(6-5)}=\sqrt{36}$ = 6 cm^2

Vizsgájuk meg, hogy másik területképlet alkalmazásával ugyanezt az eredményt kapjuk-e. A T= $\frac{a\cdot b\cdot \sin\gamma}{2}$ képlet alkalmazásához szükségünk van a gamma szögre, melyet egy cosinus-tétel alkalmazásával egyszerűen kiszámolhatunk.

$c^2=a^2+b^2-a\cdot b\cdot\cos\gamma$
$25=9+16-12\cdot\cos\gamma$
$\cos\gamma=0{,}083333$ $\gamma\approx 85°$



Alkalmazva a kiszámított γ szögre a területképletet:

T= $\frac{3\cdot 4\cdot \sin 85°}{2}\approx$ 6cm^2

Az imént kiszámított gamma szög segítségével ki tudjuk számolni a háromszög magasságát is.

$$\sin\gamma = \frac{m_a}{b}$$

$$m_a = \sin\gamma \cdot b \approx 4 \text{ cm.}$$

Ezt behelyettesítve a területképletbe:

$$T = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6 \text{ cm}^2.$$

A területképlet alkalmazásával könnyen meghatározhatjuk a háromszög beírható körének sugarát is, hiszen a T= rs képletbe behelyettesítve az imént kiszámolt területet, megkaphatjuk a beírható kör sugarát is.

6 = r·6   r = 1 cm.

Tehát akár a háromszög három oldalából könnyen meghatározhatjuk a beírható körének sugarát.

7.
ALKALMAZÁSOK:

- Mérnöki munkában a terület és felszínmérésben kilépve a síkból az integrálszámítást használjuk forgástestek térfogatának kiszámítására is, valamint egyik eszköze a függvény vizsgálatnak.

- Geometriai feladatok megoldásánál sokszor használjuk a területképleteket.

- Felszínszámításnál is a megtanult terület képleteket alkalmazzuk.

- Az építészetben lakások alapterületének, telkek nagyságának kiszámítására is alkalmazzuk, valamint földmérésnél is.

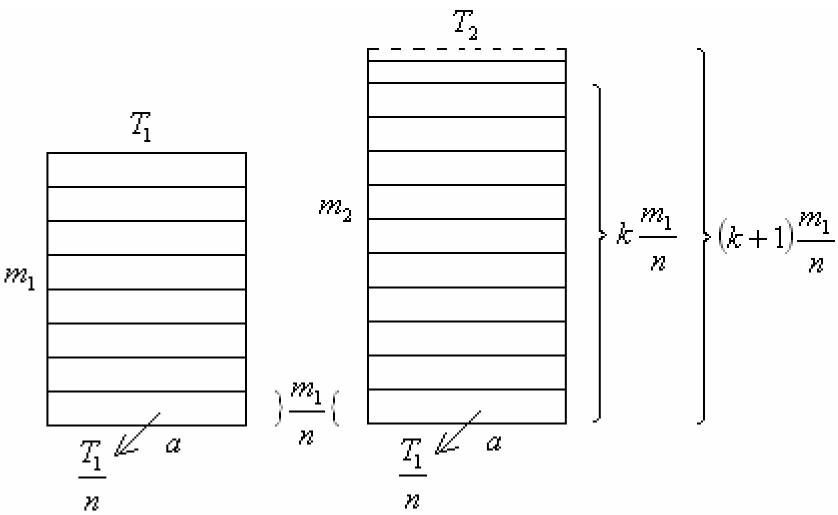
Megjegyzés: Ha már megcsináltam ezt a bizonyítást is, nem törlöm ki, hátha valamelyik mazohista állat ezt választaná. De a tétel kidolgozás szempontjából ide tettem a végére, hogy ne zavarjon be ott a háromszöges résznél. Tanár Úrra bízom hova teszi, vagy esetleg bele teszi-e. Én itt hagyom, mint kiegészítő anyag.

TÉTEL:

$T = ab$ (a szomszédos oldalak szorzata)

BIZONYÍTÁS:

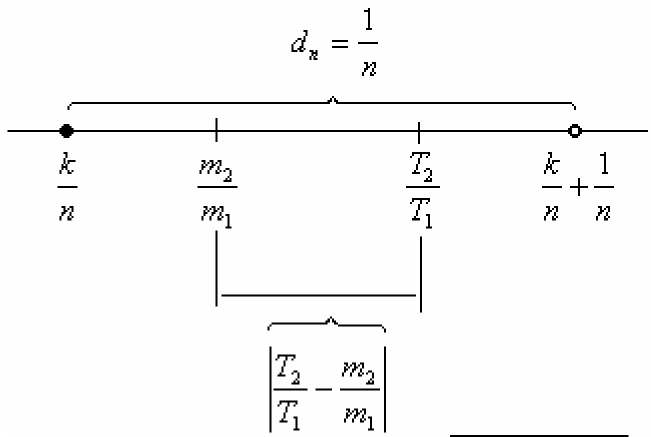
Bizonyítás: megmutatjuk, hogy $\frac{T_2}{T_1} = \frac{m_2}{m_1}$



Osszuk fel a téglalap magasságát *n* egyenlő részre $(n \in Z^+)$, és mérjük fel ezt a részt a második téglalap magasságára az alap végpontjából kiindulva ahányszor csak lehetséges. Ha ez *k*-szor lehetséges, akkor **I.** $k\frac{m_1}{n} \le m_2 < (k+1)\frac{m_1}{n}$, $(k \in Z^+)$.

Az osztópontokon át húzzunk párhuzamosokat a téglalapok alapjával. Ekkor egybevágó téglalapokat kapunk. Ezért felírhatjuk a következő egyenlőtlenséget: **II.** $k\frac{T_1}{n} \le T_2 < (k+1)\frac{T_1}{n}$

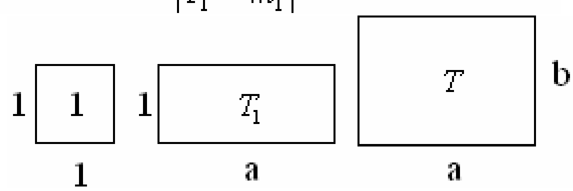
I. és **II.** egyenlőtlenségeket átalakíthatjuk. Osszuk el **I.** mindegyik oldalát az $m_1(>0)$ és **II.** mindegyik oldalát a $T_1(>0)$ számmal.



Ekkor $\frac{k}{n} \le \frac{m_2}{m_1} < \frac{k+1}{n}$

és $\frac{k}{n} \le \frac{T_2}{T_1} < \frac{k+1}{n}$

$\frac{m_2}{m_1}$ és $\frac{T_2}{T_1}$ a $\left[\frac{k}{n};\frac{k}{n}+\frac{1}{n}\right[$ intervallum belső pontja, ahol $d_n = \frac{1}{n}$ Minden *n*-re



$0 \le \left| \frac{T_2}{T_1} - \frac{m_2}{m_1} \right| < \frac{1}{n}$, az a nemnegatív szám, amely minden pozitív egész szám reciprokánál kisebb, a 0. Tehát $\frac{T_2}{T_1} - \frac{m_2}{m_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{m_2}{m_1}$, amit bizonyítani kellett.

Most tekintsünk olyan téglalapot, amelynek az alapja és a magassága 1, és hasonlítsuk össze az egység oldalú, egység területű négyzettel. Az előbb igazolt tétel szerint: $\frac{T_1}{1} = \frac{a}{1} \Leftrightarrow T_1 = a$. A T_1 területű téglalapot hasonlítsuk össze az *a* alapú és *b* magasságú *T* területű téglalappal. Ekkor $\frac{T}{T_1} = \frac{b}{1} \Leftrightarrow T = T_1 b = ab$. Ha $b = a$, akkor a téglalap négyzet és a területe $T = a^2$

<u>Kidolgozója</u>: *Kovács Lili* 12.D