24. tétel

Kombinatorika. A valószínűség ~~ki~~számításának kombinatorikus modellje.

- A témakör tartalmi felépítése
  - Permutáció
  - Kombináció
  - Variáció
  - Valószínűségszámítás

- Permutáció

Több feladatunkban arról van szó, hogy egy adott halmaz elemeit sorba rendezzük, és megszámoljuk, hány ilyen rendezés lehetséges.

Permutáció: Egy n-elemű halmaz elemeinek sorba rendezésén azt értjük, hogy kijelölünk egy első elemet, egy másodikat, ..., végül az n-ediket. 2 rendezés egyenlő, ha a megfelelő helyeken ugyanazok az elemek állnak. Egy-egy sorba rendezést szokás permutációnak nevezni.

Ismétlés nélküli permutációk száma: $P_n = n!$

$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$

Ismétléses permutációk száma: $P_n = \dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \ldots n_k!}$

$n_1 + n_2 + n_3 + \ldots n_k = n$

1. Feladat: Az NB I-ben 16 magyar focicsapat játszik. Hányféle különféle sorrend lehetséges a bajnokság végén?

$P_n = \underline{\underline{16!}}$

2. Feladat: 2, 2, 3, 4, 5 számjegyekből hány darab 5 jegyű számot rakhatunk ki?

$P_n = \dfrac{5!}{2!} = \underline{\underline{60}}$

- Kombináció

Az n-elemű halmaz k-elemű részhalmazait az n elem k-tagú kombinációinak nevezzük; számukat így jelöljük: C_n^k $(0 \le k \le n)$

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Ismétléses kombinációk száma: $C_n^k(ism) = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\cdot(n-1)!}$

3. Feladat: Hány különböző módon választhatunk ki a lottón 5 számot?

$\binom{90}{5} = 43\ 949\ 268$

- Variáció.

N különböző elemből kiválasztható rendezett k-asokat az n elem k-tagú ismétlés nélküli variációinak nevezzük. Számukat V_n^k-val jelöljük.

$V_n^k = n\cdot(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

Ismétléses variációk száma $V_n^k(ism) = n^k$

4. Feladat: 12 diák között egy labdát, egy könyvet, és egy tollat sorsolnak ki. Hányféle módon kaphatják a diákok a nyereményeket, ha minden gyerek csak 1 tárgyat nyerhet?

$\frac{12!}{(12-3)!} = \frac{12!}{9!} = 1320$

5. Feladat: Hányféle módon kaphatják a diákok a nyereményeket, ha egy gyerek több tárgyat is nyerhet?

$12^3 = 1728$

- Valószínűség számítás

Valószínűség:

Definíció: A relatív gyakoriság az adott esemény körül "mozog".

Definíció: H eseménytér; A esemény; minden ilyen eseményhez hozzárendelünk egy számot a következőképpen:

(1.) $0 \le P(A)$

(2.) $P(H) = 1$

(3.) $A\cdot B = \emptyset$ (egymást kizáró események)

$P(A+B) = P(A) + P(B)$

Teljes eseményrendszer:

Def: Az $A_1, A_2, \dots A_n$ események teljes eseményrendszert alkotnak, ha:

(1.) páronként kizárják egymást $A_i \cdot A_j = \emptyset$ $1 \le i, j \le n$

(2.) összegük a biztos esemény $A_1 + A_2 + \dots A_n = I$

Egy esemény valószínűsége $= \frac{P_{kedvező\ eset}}{P_{összes\ eset}}$

A valószínűség számítás és a kombinatorika kapcsolata abban áll, hogy egy esemény valószínűségét kombinatorikus módszerekkel számoljuk ki.

6. Feladat: 100 családból 92-ben 5-nél kevesebb gyerek van. Mennyi a valószínűsége, hogy 2 ilyen családot választunk ki?

$$\frac{P_{kedvező}}{P_{összes}} = \frac{\binom{92}{2}}{\binom{100}{2}} = 0{,}8456$$