24. Tétel
Kombinatorika; A valószínűség kiszámításának kombinatorikus modellje

1. <u>Bevezetés:</u>

Tartalmi felépítés:

- Történeti áttekintés
- Definíciók
- Tételek (és a *n* elmű halmaz összes részhalmazainak számára vonatkozó bizonyítása)
- Alkalmazások (és az egyik részletesebb kifejtése)

2. <u>Történeti áttekintés:</u>

A kombinatorika matematika azon területe, amely egy véges halmaz elemeinek csoportosításával, kiválasztásával, sorrendbe rakásával foglalkozik. Először Leibniz rendszerezte a kombinatorikai ismereteket. Nagy területei a gráfelmélet, a hipergráfok elmélete, az extremális halmazrendszerek elmélete, a leszámlálások elmélete, a Ramsey-elmélet, véges geometria és a matroidelmélet.

3. <u>Definíciók:</u>

<u>Faktoriális:</u> Adott *n* pozitív egész szám esetén *n* faktoriálisnak nevezzük az *n*-nél nem nagyobb pozitív egész számok szorzatát. A 0 faktoriálist és az 1 faktoriálist 1-nek értelmezzük.
Jelölése: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

<u>Ismétlés nélküli permutáció:</u> Egy adott $n\left(\in \mathrm{N}^{+}\right)$ elemű halmaz elemeinek egy ismétlés nélküli permutációján az *n* különböző elem egy sorba rendezését értjük. (pl.: székreültetés)
Jelölés: $n!$

<u>Ismétléses permutáció:</u> Ha az elemek között van olyan, amelyik többször is előfordul, az elemek egy sorba rendezését ismétléses permutációnak nevezzük. (pl.: 3 db 1-esből és 3 db 2-esből akarunk 6jegyű számokat. Hány db lesz?)
Jelölés: $P_n^{k_1,k_2,\ldots,k_i,i}\ \dfrac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_i!}$

<u>Ciklikus permutáció: (körasztal☺)</u>

$$\frac{\mathrm{n}!}{\mathrm{n}} = (\mathrm{n}-1)!$$

<u>Ismétlés nélküli variáció:</u> Ha $n \in \left(\mathrm{N}^{+}\right)$ különböző elemből a sorrend figyelembe vételével kiválasztunk $k\left(\in N^{+}\right)$ darabot (ahol $k \le n$) (mindegyik elemet legfeljebb egyszer választhatjuk), az *n* különböző elemnek egy k-ad osztályú ismétlés nélküli variációját kapjuk.
Jelölés: $V_n^k = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Ismétléses variáció: Ha $n \in \left(\mathrm{N}^+\right)$ -féle elemből a sorrend figyelembe vételével kiválasztunk $k\left(\in N^+\right)$ darabot (egyféle elemből többet is választhatunk), az n-féle elemnek egy k-ad osztályú ismétléses variációját kapjuk.
Jelölés: $V_n^{k,i} = n^k$.

Ismétlés nélküli kombináció: : Ha $n \in \left(\mathrm{N}^+\right)$ különböző elemből a sorrend figyelembe vétele nélkül kiválasztunk $k\left(\in N^+\right)$ darabot (ahol $k \le n$) (mindegyik elemet legfeljebb egyszer választhatjuk), az n különböző elemnek egy k-ad osztályú ismétlés nélküli kombinációját kapjuk.
Jelölés: $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$. Az $\binom{n}{k}$ kifejezéseket binomiális együtthatóknak nevezzük.

Ismétléses kombináció: Ha $n \in \left(\mathrm{N}^+\right)$ féle különböző elemből választunk $k\left(\in N^+\right)$ darabot úgy, hogy a választás sorrendje nem számít és mindegyikféle elemből többet is választhatunk, az n-féle elem k-ad osztályú ismétléses kombinációját kapjuk.
Jelölés: $C_n^{k,i} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!}$.

Valószínűség:

Adott A esemény *valószínűség*ének azt a számot tekintjük, ami körül a relatív gyakoriság ingadozik.
Az A esemény valószínűségének a jele: P(A).

A,B: esemény
1. P: A→[0;1]
2. $P_{(0)}=0$; $P_{(1)}=1$
3. Ha A·B=0 akkor $P_{(A+B)} = P_{(A)} + P_{(B)}$

A valószínűség klasszikus modellje (kombinatorikus modell) akkor alkalmazható, ha egy kísérletnek véges sok kimenetele van, és ezek valószínűsége egyenlő.
Ekkor egy esemény valószínűsége egyenesen arányos az eseményt alkotó elemi események számával:

$\boxed{P(A) = \frac{k}{N} = \frac{\textbf{kedvező esetek száma}}{\textbf{összes esetek száma}}}$.

4. Tételek:

Egy n elemű véges halmaz részhalmazainak száma 2^n.

Bizonyítás: - Az n elemű halmaz egy részhalmazának kiválasztásakor vagy kiválasztjuk (alá + jelet írunk), vagy nem választjuk ki (alá – jelet írunk). Mivel minden részhalmazhoz egyértelműen tartozik egy jelsorozat, és minden jelsorozathoz egyértelműen tartozik egy részhalmaz, a halmaznak ugyanannyi részhalmaza van, ahányféleképpen az elemei alá + vagy – jelet írunk. Minden elemnél két lehetőség közül választhatunk, így a lehetséges jelsorozatok száma, vagyis az n elemű halmaz részhalmazainak száma: 2^n .

5. <u>Alkalmazások:</u>

a) lottó, totó, szerencsejáték
b) mintavétel, közvélemény-kutatás, minőség-ellenőrzés
c) a nyeremény igazságos szétosztása félbeszakadt játék esetén

Az 5/a pontban szereplő alkalmazás kidolgozása:

Zolika☺ most tudja meg hogy az ötös lottó főnyereménye már több mint 1 milliárd forint (MENNYI??? ☺), ezért elfut a lottózóba, és megjátssza 1 db szelvényen a kedvenc 5 számát. Hazaérve gondolkodóba (???? ☺) esik, és megpróbálja kiszámítani, mekkora is az esélye a főnyeremény megnyerésére. Zolika azt a megszorítást☺ teszi, hogy az általa megjátszott számkombinációt senki más nem játszotta meg. Zolika a matek órai tanulmányai alapján rájön, hogy az adott probléma megoldását ismétlés nélküli kombinációval számolhatja ki. Az $\binom{n}{k}$ formát használva (*n=90, hiszen 90 db szám van az ötös lottóban, k=5, hiszen 5 darabot húznak ki*) kiszámolja, hogy az összes lehetséges húzási kombináció darabszáma= 43949268.

Zolika a valószínűség kombinatorikus modelljét használva $\boxed{P(A) = \frac{k}{N} = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes esetek száma}}}$.
(*k=1, hiszen Zolikának csak az a számkombináció jó, ami az ő szelvényén szerepel, N=43949268, hiszen ennyi az összes lehetséges kombináció*) kiszámítja, hogy bizony-bizony az esélye a főnyereményre nagyon kicsi, csak mintegy $2{,}27*10^{-08}$. Zolika ezt a számot látva úgy határoz, hogy soha többet nem veri☺ el a zsebpénzét lottózásra, hiszen a nyerési esélye nagyon kicsi.

☺

<u>Kidolgozója</u>: *Vojts Máté 12.D*