25. Tétel
Bizonyítási módszerek és bemutatásuk tételek bizonyításában

1. A témakör tartalmi felépítése:

- Bizonyítási módszerek és azok definíciói
- Tételek bizonyítása a fent említett módszerek segítségével
- Alkalmazások

2. A témakör tartalmi felépítésének kifejtése:

2.1.Történeti bevezető:

Már René Descartes (1569-1650) a Szabályok a gondolkodás irányítására c. művében általános módszert keresett a problémák megoldására. Úgy gondolta, hogy először minden problémát matematikai problémára vezet vissza, másodszor minden matematikai problémát algebraira, végül ezeket egyenlet megoldására.
A matematikában amit állítunk, azt be is kell bizonyítanunk. A bizonyítás folyamata 3 lépésből áll:
1. a feltétel megadása
2. az állítás kimondása
3. a bizonyítás végrehajtása

2.2 Definíciók:

Teljes indukció elve: Adott egy *n* pozitív számtól függő állítás.
Lépései:
1. n = 1-re bebizonyítjuk az állítást;
2. feltételezzük, hogy n-re igaz az állítás (indukciós hipotézis);
3. az indukciós hipotézist felhasználva bebizonyítjuk, hogy az n+1. tagra teljesül állításunk. (Ezzel azt láttuk be, hogy a tulajdonság öröklődik az n. tagról az n+1. tagra)

Direkt bizonyítás: Igaz állításokból indulva helyes logikai lépések során a bizonyítandó állításhoz jutunk.

Indirekt bizonyítás: Az állítás tagadásának feltételezéséből, helyes logikai lépések során ellentmondásra jutunk.

A skatulya-elv: Ha *n* db tárgyat *k* db skatulyában helyezünk el, és $n > k \cdot p$, akkor biztosan lesz olyan skatulya, amelyikbe legalább *p+1* tárgy kerül.

3.1. Tételek:

1. Teljes indukció módszere:

Állítás: A számtani sorozat n-edik tagja: $a_n = a_1 + (n-1)d$.

Az állítás helyességét teljes indukcióval fogjuk belátni. Közben felhasználjuk a sorozat definícióját, miszerint: $a_n = a_{n-1} + d$.

1. A definíció felhasználásával belátjuk konkrét **n** értékekre:

   Az állítás n = 2 igaz: $a_2 = a_1 + d$.
   n = 3-ra is igaz $a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$.

2. Feltételezzük, hogy n olyan index, amire még igaz: $\mathbf{a_n = a_1 + (n - 1)\,d}$.
   Ilyen az 1. pont szerint biztosan van.

3. Ezt felhasználva, bebizonyítjuk, hogy a rákövetkező tagra is igaz marad, azaz: $\mathbf{a_{n+1} = a_1 + nd}$.
   Tehát azt, hogy a tulajdonság öröklődik.

Definíció szerint az n-edik tag után következő tag: $\mathbf{a_{n+1} = a_n + d}$
Az $\mathbf{a_n}$ értékére felhasználva az indukciós feltevést: $\mathbf{a_{n+1} = (a_1 + (n - 1)d) + d}$
Zárójel felbontása és összevonás után: $\mathbf{a_{n+1} = a_1 + nd}$

Ezt akartuk bizonyítani.

2. Direkt bizonyítás:

Tétel: Az n elemű halmaz részhalmazainak száma 2^n.

Bizonyítás: Az n elemű halmaz elemeit sorszámozzuk meg egyféleképpen. Ekkor minden egyes részhalmazhoz hozzá tudunk rendelni egy szám n-est a következőféleképpen: az i. helyen 1 van, ha az i. elem belekerült a részhalmazba és 0, ha nem. Ekkor az is igaz, hogy bármely 0-ból és 0-ből álló szám n-eshez hozzárendelhető egy részhalmaza a halmaznak. Azaz egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést adtunk meg a részhalmazok és a szám n-esek között. Ergo, ha tudjuk a szám n-esek számát, akkor a részhalmazok számát is. Márpedig mivel a szám n-es minden pozíciójába kétféle érték (0 vagy 1) kerülhet, ezért ezekből 2^n darab van. Így az n elemű halmaz részhalmazainak száma is 2^n.

3. Indirekt bizonyítás:

Tétel: $\sqrt{2}$ irracionális szám

Bizonyítás (indirekt): Tételezzük fel, hogy $\sqrt{2}$ racionális, azaz $\sqrt{2}$= a / b, ahol a, b egész számok, és b nem nulla. Azt is feltételezhetjük, hogy (a,b) = 1, azaz egymáshoz képest relatív prímek, azaz tovább nem egyszerűsíthetők.
$\sqrt{2}$= a / b egyenlőség mindkét oldalát négyzetre emelve (most ekvivalens művelet, mert pozitív számokról van szó) $2 = a^2 / b^2$.
Az egyenlőséget b^2-tel átszorozva:
$2b^2 = a^2$
Tehát a^2 osztható 2-vel, azaz páros szám, de akkor "a" is az, így a = 2c, így $a^2 = 4c^2$.
Ebből:
$2b^2 = 4c^2$, azaz $b^2 = 2c^2$.
Azaz b^2 is páros szám lenne, ami nem lehetséges, hiszen feltételeztük, hogy a és b egymáshoz képest relatív prímek.
Ellenmondásra jutottunk, a kiinduló feltételezésünk hibás, $\sqrt{2}$ nem lehet racionális szám.

<u>Alkalmazás:</u>

- Hétköznapi problémák

Pl.: 30 gyerek közül legalább hányan születtek az év ugyanabban a hónapjában?
Megoldás: Az év 12 hónapja megfeleltethető 1-1 skatulyának, melybe a 30 tanulót el kell helyezni. $30 = 12 \cdot 2 + 6$, ezért a skatulya-elv szerint legalább hárman születtek az évnek ugyanabban a hónapjában.