25. Tétel
Bizonyítási módszerek és bemutatásuk tételek bizonyításában

A matematikában a bizonyítás folyamata 3 lépésből áll:
1. a feltétel megadása
2. az állítás kimondása
3. a bizonyítás végrehajtása

Definíciók:

Teljes indukció elve: Adott egy *n* pozitív számtól függő állítás.
Lépései:
1. n = 1-re bebizonyítjuk az állítást;
2. feltételezzük, hogy n-re igaz az állítás
3. ezt a feltevést felhasználva bebizonyítjuk, hogy az n+1. tagra teljesül állításunk.

Direkt bizonyítás: Igaz állításokból indulva helyes logikai lépések során a bizonyítandó állításhoz jutunk.

Indirekt bizonyítás: Az állítás tagadásának feltételezéséből, helyes logikai lépések során ellentmondásra jutunk.

A skatulya-elv: Ha *n* db tárgyat *k* db skatulyában helyezünk el, és $n > k \cdot p$, akkor biztosan lesz olyan skatulya, amelyikbe legalább *p+1* tárgy kerül.

Tételek:

1. Teljes indukció módszere:

Állítás: A számtani sorozat n-edik tagja: $a_n = a_1 + (n-1)d$.

Az állítás helyességét teljes indukcióval fogjuk belátni. Közben felhasználjuk a sorozat definícióját, miszerint: $a_n = a_{n-1} + d$.

1. A definíció felhasználásával belátjuk konkrét **n** értékekre:

Az állítás: n = 1 igaz: $a_1 = a_1 + 0*d$.

n = 2-re is igaz $a_2 = a_1 + d$

2. Tegyük fel h a_n - re igaz : $\mathbf{a_n = a_1 + (n - 1) d}$.
3. Ezt felhasználva, bebizonyítjuk, hogy a rákövetkező tagra is igaz marad, azaz: $\mathbf{a_{n+1} = a_1 + nd}$.

   Definíció szerint az n-edik tag után következő tag: $\mathbf{a_{n+1} = a_n + d}$

   Az $\mathbf{a_n}$ értékére felhasználva az indukciós feltevést: $\mathbf{a_{n+1} = (a_1 + (n - 1)*d) + d}$

Zárójel felbontása és összevonás után: $\mathbf{a_{n+1} = a_1 + n*d}$

Bizonyítás vége..

3. Direkt bizonyítás:

<u>Tétel:</u> Két nem negatív valós szám mértani közepe nem nagyobb, mint ugyanezen két szám számtani közepe : $\mathbf{a*b^{½} \leq (a+b)/2}$

<u>Biz.</u>: Mivel az állítás mindkét oldalán nem negatív kifejezés áll, ezért mindkét oldalát négyzetre emelhetjük, ez most ekvivalens átalakítás:

$a*b \leq (a+b)^2/4$ (A jobboldali kifejezésben a zárójel felbontása és a nevezővel történő átszorzás után):

$4ab \leq a^2+2ab+b^2$

$0 \leq a^2-2ab+b^2$

$\mathbf{0 \leq (a-b)^2}$ (a bal oldal mindig kisebb, illetve csak akkor egyenlő a két oldal ha a,b egyenlők)

4. Indirekt bizonyítás:

Tétel: $\sqrt{2}$ irracionális szám

Bizonyítás (indirekt): Tételezzük fel, hogy $\sqrt{2}$ racionális, azaz $\sqrt{2}$= a / b, ahol a, b egész számok, és b nem nulla. Azt is feltételezhetjük, hogy (a,b) = 1, azaz egymáshoz képest relatív prímek, azaz tovább nem egyszerűsíthetők.

$\sqrt{2}$= a / b egyenlőség mindkét oldalát négyzetre emelve (most ekvivalens művelet, mert pozitív számokról van szó) $2 = a^2 / b^2$.

Az egyenlőséget b^2-tel átszorozva:

$2b^2 = a^2$

Tehát a^2 osztható 2-vel, azaz páros szám, de akkor "a" is az, így a = 2c, így $a^2 = 4c^2$.

Ebből:

$2b^2 = 4c^2$, azaz $b^2 = 2c^2$.

Azaz b^2 is páros szám lenne, ami nem lehetséges, hiszen feltételeztük, hogy a és b egymáshoz képest relatív prímek.

Ellenmondásra jutottunk, a kiinduló feltételezésünk hibás, $\sqrt{2}$ nem lehet racionális szám.

2. Skatulya-elv:

Pl.: 45 gyerek közül legalább hányan születtek az év ugyanabban a hónapjában?

Megoldás: Az év 12 hónapja megfeleltethető 1-1 skatulyának, melybe a 45 tanulót el kell helyezni. $45 = 12\cdot3 + 9$, ezért a skatulya-elv szerint legalább hárman születtek ugyanabban a hónapban.

<u>Alkalmazás:</u>

- Tételek bizonyítása
- Oszthatósági feladatok
- Hétköznapi problémák megoldása, (például a skatulya elv segítségével egy a fentihez hasonló probléma megoldása..)

<u>Kidolgozója</u>: *Tapolczai Gábor 12.D*