2. tétel
Számhalmazok, halmazok számossága

A halmazelmélet a matematika egyik alapvető tudományága, mely a halmaz fogalmának matematikai vizsgálatával, nem utolsósorban pedig a matematika halmazelméleti fogalmakra való visszavezetésével, megalapozásával foglalkozik.

Felépítés:
1. Fogalomtár
2. Halmazok számossága
3. Számhalmazok
4. Halmazábra
5. Bizonyítás
6. Alkalmazás

1.
Fogalomtár:
Halmaz: Alapfogalom. Nem definiáljuk.

Üres halmaz: Azt a halmazt, amelynek egyetlen eleme sincsen, üres halmaznak nevezzük.
Jele: $\emptyset$

.

Részhalmaz: Legyenek *A* és *B* tetszőleges halmazok. Azt mondjuk, hogy az *A* halmaz részhalmaza a *B* halmaznak (vagy más szavakkal: a *B* halmaz tartalmazza az *A* halmazt), ha az *A* minden eleme a *B* halmaznak is eleme. Jele: $A \subseteq B$.
Az *A* halmazt a *B* halmaz valódi részhalmazának nevezzük, ha $A \subseteq B$, és $A \neq B$.

2.
Számosság: Minden halmazhoz rendelünk egy számosságot oly módon, hogy az ekvivalens halmazok számossága egyenlő, a nem ekvivalens halmazok számossága pedig különbözik.

Ekvivalens halmaz: két halmaz egyenlő számosságú, azaz ekvivalens, ha elemei között bijekció, azaz kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető.

> Pl.: pozitív egész számok ekvivalensek a természetes számokkal, mert kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, hogy t=p-1.

Véges halmaz: egy halmaz véges, ha nem ekvivalens egyetlen részhalmazával sem.
Bármely részhalmaza véges.
Véges számú véges halmaz uniója is véges.

Végtelen halmaz: egy halmaz végtelen, ha nem véges, azaz van legalább egy ilyen, amivel ekvivalens.
Végtelen halmazt tartalmazó bármely halmaz végtelen.

Megszámlálhatóan végtelen halmaz:
Azokat a halmazokat, amelyek ekvivalensek a természetes számok halmazával, megszámlálható végtelen halmazoknak nevezzük.

3.

Természetes számok:

Jele: $\mathbb{N}$

Természetes számoknak nevezzük a $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8....\}$ számok által alkotott halmazt.
A természetes számok halmaza végtelen halmaz.
A véges halmazok számosságát természetes számoknak nevezzük.
A természetes számok halmaza a legkisebb számosságú végtelen halmaz.
Rendezési tulajdonságok: Egy nagyon fontos tulajdonsága, hogy jól rendezett, azaz akárhány (de legalább egy) természetes számot kiválasztva azok között van egy legkisebb.
Algebrai tulajdonságok: A természetes számok között értelmeztük az összeadást és a szorzást, hisz ha két természetes számot összeadunk, vagy összeszorzunk, akkor az eredményük is természetes szám. A természetes számok körében kivonást is végezhetünk, (pl: 5-3=2) , azonban ha azt akarjuk, hogy bármely kivonás értelmes számot adjon eredményül, bővítenünk kell a számfogalmat. Ugyanis amíg csak a természetes számokat ismerjük, addig a 2-5-nek nincs értelme.

Egész számok:

Jele: $\mathbb{Z}$

Egész számoknak nevezzük a $\{-3;-2;-1;0;1;2;3...\}$ számokat. Az egész számok halmaza tehát részhalmaza a természetes számok halmazának.
Az egész számok halmazának számossága megegyezik a természetes számok halmazának számosságával.
Rendezési tulajdonságok: Az egész számok halmaza lineárisan rendezett.
Algebrai tulajdonságok: az egész számok között értelmezzük az összeadást, szorzást és a kivonást. Az osztás azonban nem minden esetben hajtható végre, mivel a megoldás nem feltétlen lesz egész szám.

Racionális számok:

Jele: $\mathbb{Q}$

Racionális számok azon a számok, amelyek felírhatók két egész szám hányadosaként.
Végtelen, nincs legnagyobb és nincs legkisebb szám köztük.
Rendezési tulajdonságok: Rendezhető, azaz nagyság szerint sorba rakható.
Algebrai tulajdonságok: a racionális számok között értelmeztük az összeadás, a kivonást, a szorzást és az osztást is.
A racionális számokat végtelen sok alakban fel lehet írni, de a legegyszerűbb forma a tört, ahol a számláló és a nevező relatív prímek.
Tizedes tört alakjuk lehet:

1. véges
2. végtelen, de szakaszos (periodikus)

Tiszta periodikus. Pl.: $\frac{1}{3}=0,\dot{3}$

Vegyes periodikus Pl.: $\frac{2}{7}=0,\dot{2}8571\dot{4}$

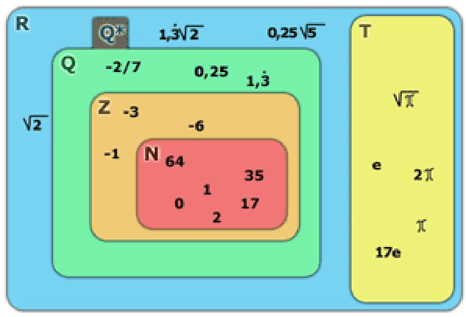
Irracionális számok:

Jele: *I*

a nem periodikus végtelen tizedes törtek, azaz azok a számok, amelyek nem írhatók fel két egész szám hányadosaként.
Algebrai tulajdonságok: ha irracionális számot összeadunk, kivonunk, összeszorzunk, vagy elosztunk, nem biztos hogy irracionális számot kapunk. (pl. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$ =2.)
Más részük azonban így nem szerkeszthető, ilyen pl a π
Az irracionális számok tehát két csoportba sorolhatók: vannak az úgynevezett <u>transzcendens</u> számok. Ezek olyan irracionális számok, amelyek nem gyökei semmilyen racionális együtthatójú algebrai egyenletnek sem. ilyen tehát a π, vagy az ”e”, a természetes logaritmus alapszáma. A másik csoportba tartozó irracionális számokat <u>algebrai számoknak</u> hívjuk. Ilyen például a $\sqrt{2}$.

Valós számok:
Jele: *R*.
Az irracionális számok és a racionális számok együttese.
A valós számok és a számegyenes pontjai között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés van.
Vannak nem megszámlálhatóan végtelen számosságú halmazok is, azaz amelyeknek elemei és a pozitív egész számok között nem létesíthető kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés.
Ilyen pl a valós számok halmaza. Ennek a halmaznak a számosságát kontinuum számosságúnak mondjuk.

4.
Halmazábra:
A halmazok szemléletes ábrázolását Venn - diagrammokkal szoktuk szemléltetni. (John Venn - angol matematikus) A Venn - diagrammokon általában valamilyen síkidomok (köz, ellipszis, téglalap, négyzet) jelképezik az egyes halmazokat.

N = {Természetes számok halmaza.} Z = {Egész számok halmaza.} Q = {Racionális számok halmaza. } Q* (I) = {Irracionális számok halmaza.} T = {Transzcendens számok halmaza.} R = {Valós számok halmaza.}	

5.
TÉTEL:

A $\sqrt{5}$ irracionális szám.

BIZONYÍTÁS:
(indirekt)

Tegyük fel, hogy $\sqrt{5}$ racionális, tehát felírható $\frac{a}{b}$ formában, ahol a és b egész számok, és $b \neq 0$. Tegyük fel, hogy (a;b) = 1, azaz egymáshoz képest relatív prímek, azaz tovább nem egyszerűsíthetőek.

$\frac{a}{b} = \sqrt{5}$ az egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve

$\frac{a^2}{b^2}=5$ átszorozva b^2-tel

$a^2=5b^2$ azaz a^2 osztható lesz 5-tel, vagyis felírható a= 5t formában. Így:

$25t^2=5b^2$ vagyis $5t^2=b^2$ amiből következik, hogy b is felírható b=5l alakban.

Ezek szerint b is osztható lesz 5-tel, ami pedig nem lehetséges, hiszen az elején feltételeztük, hogy a és b egymáshoz képest pozitív prímek.

Ellentmondáshoz jutottunk, a kiinduló feltevésünk, miszerint a $\sqrt{5}$ racionális, tehát nem igaz, a $\sqrt{5}$ nem lehet racionális szám, vagyis irracionális.

6.
ALKALMAZÁS

- Egyenletek alaphalmaza és értelmezési tartományának meghatározása.
  Pl.: lg(x-2)=3 esetén alaphalmaz [2;8[
- Függvények megadásakor az értelmezési tartomány és értékkészlet meghatározása.
  Pl.: f(x)=$\frac{5}{x-1}$ esetén az alaphalmaz R \ {1}
- Teljes indukciós bizonyításnál a természetes számok azon tulajdonságát használjuk ki, hogy minden természetes számhoz egyet hozzá adva ismét természetes számot kapunk.

Kidolgozója: *Kovács Lili* 12.D