3. Nevezetes ponthalmazok a síkban és a térben

1. Alapfogalmak
2. Nevezetes sík- és térbeli alakzatok, definícióik
3. Thalész-tétel
4. Gyakorlati alkalmazás

1.

Pont: alapfogalom, nem definiáljuk
Egyenes: alapfogalom, nem definiáljuk /1D/
Sík: alapfogalom, nem definiáljuk /2D/
Tér: alapfogalom, nem definiáljuk /3D/
Alakzat: azon pontok halmaza, vagyis ponthalmaz, amelyek magát az alakzatot alkotják

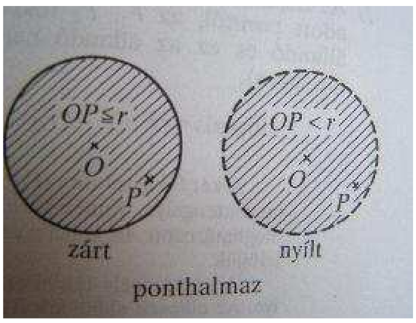
2.

Szakaszfelező merőleges: két adott ponttól egyenlő távolságra levő pontok halmaza a síkban szakaszfelező merőleges
Szakaszfelező merőleges sík: két adott ponttól egyenlő távolságra levő pontok halmaza a térben
Szögfelező egyenesek: két adott, metsző egyenestől egyenlő távolságra levő pontok halmaza a síkban
Szögfelező síkok: két adott, metsző síktól egyenlő távolságra levő pontok halmaza a síkban
Hengerfelület: adott egyenestől adott távolságra pontok halmaza a térben

<u>Kör</u>

Körvonal: azon P pontok halmaza az S síkban, melyek O ponttól r távolságra vannak.
Egyenlete: körvonal={P|OP=r; P $\in$ S}
Koordinátageometriai megfelelője: /az alakzat melynek képe kör/
$x^2+y^2=r^2$ $(x-u)^2+(y-v)^2=r^2$

Körlap: azon P pontok halmaza az S síkban, megyek az O ponttól r-nél nem nagyobb távolságra vannak. Egyenlete: körlap={P|OP $\leq$ r; P $\in$ S}

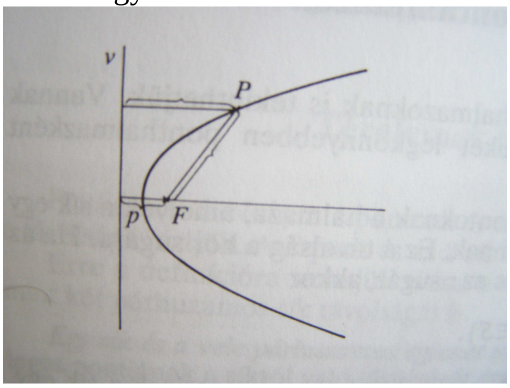


Gömb

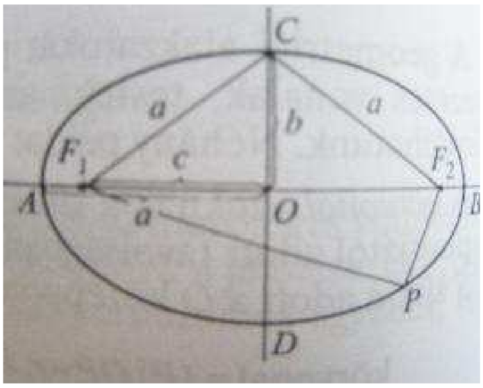
Gömbfelület: azon P pontok halmaza a térben, melyek O ponttól r távolságra vannak.
Egyenlet: gömbfelület={P|OP=r}

Gömbtest: azon P pontok halmaza a térben, melyek O ponttól legfeljebb r távolságra vannak. Egyenlete: gömbtest={P|OP$\leq$r}

Parabola: adott v egyenestől /vezéregyenes~direktrix/ és adott, rá nem illeszkedő F ponttól /fókuszpont/ egyenlő távolságra pontok halmaza a síkban. Egyenlete: parabola={ $P \mid d(P,v) = d(P,F)$ } Koordinátageometriai megfelelője: másodfokú egyenletek



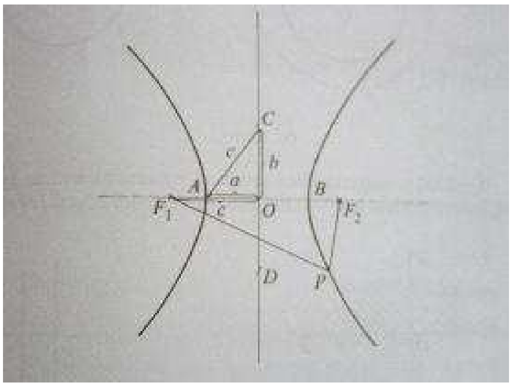
Ellipszis: azon pontok halmaza a síkban, amelyeknek két adott ponttól /F_1,F_2 fókuszpontok/ mért távolságösszege állandó /A/ és ez az állandó nagyobb a fókuszpontok távolságánál Egyenlete: ellipszis={P|PF_1+PF_2=A>F_1F_2} Koordinátageometriai megfelelője: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $\frac{(x-u)^2}{a^2}+\frac{(y-v)^2}{b^2}=1$ $\frac{1}{x}$



<u>Hiperbola</u>: azon pontok halmaza a síkban, amelyeknek két adott ponttól /F_1, F_2 ($F_1 \neq F_2$)/ mért távolságkülönbségének abszolút értéke egy olyan pozitív állandó /A/ , amely kisebb a két fókuszpont távolságánál Egyenlete: hiperbola={P| $|PF_1-PF_2|$ = A <F_1F_2}

Koordinátageometriai megfelelője: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $\frac{(x-u)^2}{a^2}-\frac{(y-v)^2}{b^2}=1$ illetve az

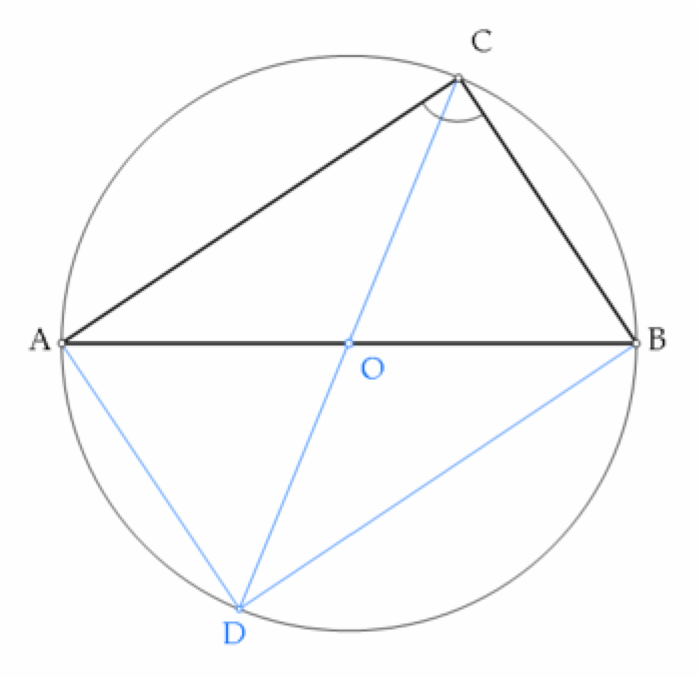
$\frac{1}{x}$ alapú függvények



3.

Thalész-tétel: Egy kör átmérőjének 2 végpontjából /A, B/ a körvonal bármelyik pontja /C/, kivéve A és B, derékszög alatt látszik.

Egy elemi geometriai bizonyítás szimmetriatulajdonságokkal



Rajzoljuk be az *O* középpontot és hosszabbítsuk meg a *CO* szakaszt *O*-n túl a kör ívéig, amit messen a *D* pontban.

Azt kell belátnunk, hogy a *C*-nél lévő szög derékszög.

Tudjuk, hogy egy négyszög akkor és csak akkor téglalap, ha átlói felezik egymást és egyenlő hosszúságúak. De az *ADBC* négyszög átlói egyenlők (mert mindkettő a kör átmérője) és felezik egymást (az *O* pontban), így az *ADBC* négyszög téglalap. Ebből viszont következik, hogy minden szöge, így a C-nél lévő szög is derékszög

Megjegyzés. Természetesen a szimmetriát itt az O pontra vonatkozó középpontos tükrözés jelenti.

A Thalész-tétel megfordítása - Legyen egy kör átmérője *AB*. Ha egy *C* pontból *AB* derékszögben látszik, akkor *C* a körön van.

Bizonyítás. Az egyik lehetséges bizonyításhoz tekintsük a mellékelt ábrát, melyen T az ABC∆ átfogóhoz tartozó magasságának talppontja, mely x távolságra van az átfogó O felezőpontjától. Azt kell belátnunk, AO=OB=OC. így a Thalész-tétel Pitagorasz-tétel megfordításának felhasználásával történő bizonyítására. Ebben az esetben a következőket tudjuk (a CTB∆ és ATC∆ és ABC∆ derékszögű háromszögekre a Pitagorasz-tétel felírva:

$$(r + x)^2 + m^2 = b^2$$
$$(r - x)^2 + m^2 = a^2$$
$$a^2 + b^2 = d^2$$

Az $x^2 + m^2 = r^2$ egyenlőséget most nem felhasználni, hanem igazolni fogjuk. Az első két egyenlőséget összeadva és rendezve, adódik:

$$a^2 + b^2 = 2r^2 + 2(x^2 + m^2)$$

vagyis:

$$2(x^2 + m^2) = a^2 + b^2 - 2r^2$$

de $a^2 + b^2 = d^2$ miatt:

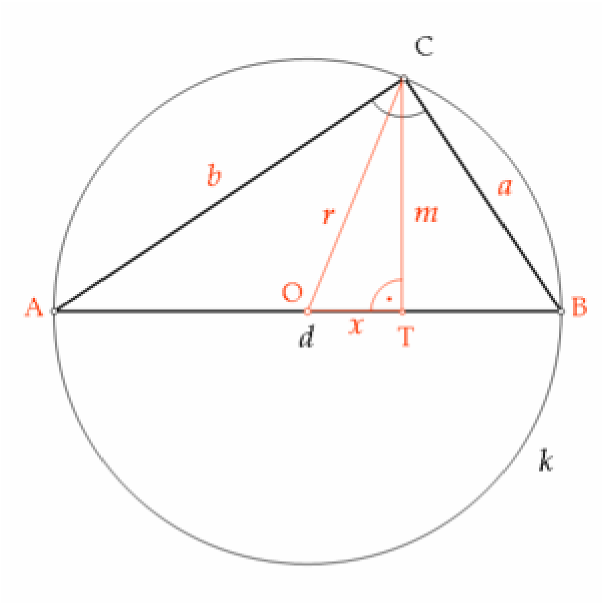
$$2(x^2 + m^2) = d^2 - 2r^2 = 4r^2 - 2r^2 = 2r^2$$

ahonnan:

$$x^2 + m^2 = r^2$$

vagyis az *OC* szakasz éppen *r* (sugárnyi) hosszúságú, így *C* a körön van.

Megjegyzés. Az O = T eset triviális (ekkor ACB∆ egyenlőszárú derékszögű háromszög, a CT = CO a derékszöghöz tartozó szögfelezője, mely a háromszöget két szintén egyenlőszárú derékszögű háromszögre vágja szét, a szárak AO és OC, illetve OB és OC ez esetben szintén egyenlők).



4.

Alkalmazás:

A Kepler-törvények (fizika)

1. A bolygók pályája ellipszis, és annak egyik gyújtópontjában van a Nap
2. A bolygók napközelben gyorsabban mozognak, mint távol. Azonos idők alatt azonos területet súrol a bolygók vezérsugara, a bolygót a Nappal összekötő szakasz.
3. A bolygók Naptól való átlagos távolságainak (a, a pálya fél nagytengelyeinek) köbei úgy aránylanak egymáshoz, mint a keringési idejük (T) négyzetei, azaz az a^3 / T^2 hányados minden naprendszerbeli bolygó esetén ugyanakkora.

   Például a Jupiter keringési idejének (11,8 földi év) négyzete majdnem 140. A Jupiter majdnem 5,2-szer van távolabb a Naptól, mint a Föld; ennek köbe (5,2-ször 5,2-ször 5,2) szintén majdnem 140.

A fenti törvények általánosíthatóak: igazak egy csillag körül keringő bolygóra, egy bolygó körül keringő holdakra és műholdakra, bármely nagy tömegű égitest körül keringő más égitestekre, csupán az a^3 / T^2 értéke más, a központi égitest tömegétől függ. Egy másik általánosítás a tetszőleges Kúpszelet alakú pályákhoz vezet; például egyes Üstökösök pályája Parabola alakú. A Kepler-törvények közel egyforma tömegű testekre is általánosíthatóak, de ekkor a III. törvény közelítő jelleget ölt. Kepler törvényeinek fizikai magyarázatát a Kéttestprobléma szolgáltatja.

A hangrobbanás és a hiperbola

Hőfókuszáló parabolatükör

Kidolgozója: *Klesitz András 12.D*