<u>Hatványozás:</u>

Tartalmi felépítés

- definíciók
- azonosságok
- tételbizonyítás
- hatványok kiterjesztése
- egyéb alkalmazások

Történeti bevezető:
A matematikusok az ókortól kezdve használtak bizonyos többtényezős szorzatokat, melyekben a szorzótényezők azonosak voltak (pl. Pitagorasz-tétel), de a hatványozást kitevőkkel Descartes használta először ($a\cdot a=a^2$).

Def.:

1.) $a^0=1$ Minden szám 0. hatványa 1, kivéve a 0-t (0^0-t nem értelmezzük)
2.) $a^1=a$ Minden szám 1. hatványa önmaga.
3.) $a^n=a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a$ Olyan n tényezős szorzat, melynek minden tényezője a ($n\in\mathbf{R}^+$).
4.) $a^{-n}=1/a^n$ n=0-nál nagyobb egész szám

Azonosságok pozitív egész kitevőre:

1.) $a^n\cdot a^m=a^{n+m}$ ($m;n\in\mathbf{Z}^+$)
2.) $a^n/a^m=a^{n-m}$ ($a\neq0$)
3.) $(a^n)^m=a^{n\cdot m}$
4.) $a^n\cdot b^n=(ab)^n$
5.) $a^n/b^n=(a/b)^n$ ($b\neq0$)

Bizonyítás:

I. azonosság: Azonos alapú hatványok szorzatát megkapjuk, ha az alapot a kitevők összegére emeljük.

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ $(m;n \in \mathbf{Z}^+)$

Definíció alapján

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n\text{-szer}}$ (Olyan n tényezős szorzat, melynek minden tényezője a ($n \in \mathbf{Z}^+$)

$a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{m\text{-szer}}$ (Olyan m tényezős szorzat, melynek minden tényezője a ($m \in \mathbf{Z}^+$).

$a^n \cdot a^m = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a)}_{n\text{-szer}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a)}_{m\text{-szer}} = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a)}_{n+m\text{-szer}} = a^{n+m}$

Felhasználtuk a hatványozás definícióját és a szorzás asszociativitását.
Pl.: $2^3 \cdot 2^7 = 2^{3+7=} 8 \cdot 128 = 1024 = 2^{10}$

Hatványok kiterjesztése:

<u>Hatványozás</u> <u>racionális</u> <u>kitevőre:</u>
Bármely 0-tól különböző valós szám racionális (két egész ($n;m \neq 0 \in \mathbf{Z}$) szám hányadosaként felírható) hatványa egyenlő az alap n. hatványából vont m. gyökével. (Egy nemnegatív valós szám négyzetgyökén azt a számot értjük, melyet négyzetre emelve az eredeti számot kapjuk.)

$a^{n/m} = \sqrt[m]{(a^n)}$

A hatványozás azonosságai racionális kitevő esetén is érvényesek.

<u>Hatványozás</u> <u>irracionális</u> <u>kitevőre:</u>
A kétoldali közelítés (rendőr-elv) segítségével bebizonyítható, hogy az irracionális kitevőjű hatvány létezik, és az eddig megismert azonosságok érvényben maradnak.
Def.: a $\in R+$, x $\in R \setminus Q$, $a^x = \lim(a^{rn})$, $r_n \rightarrow x$ racionális tagú sorozat

Ez alapján értelmezhetjük a $\sqrt{2}$-edik hatványt.

További alkalmazások:

Matematikai:
- mértani sorozatok
- normálalak (pl. $3000= 3\cdot10^3$)

Matematikán kívüli:
- kamatok számítása
- fizikai mértékegységek átváltása
- **radioaktivitás:**

Radioaktív bomlás során a hasadó anyag részecskéi exponenciálisan csökkennek. Ha a kezdeti részecskék számát N_0-nak nevezzük, akkor a megmaradó részecskék számát (N_t) az idő (t) függvényében felírva az alábbi egyenletet kapjuk.

$\mathbf{N_t=N_0\cdot e^{\lambda\cdot t}}$

$\lambda=\ln2/T$ (T-vel az anyag felezési idejét jelöljük)

Tehát $\mathbf{N_t=N_0\cdot 2^{-t/T}}$

Az átalakításnál a hatványozás és a logaritmus azonosságait használtuk fel.

Kidolgozója: *Kovács Dániel* 12.D