7. Tétel
Első- és másodfokú függvények, egyenletek

1. A témakör tartalmi felépítése

- **Elsőfokú függvény (definíció, jellemzés)**
- **Másodfokú függvény (általános alak, jellemzés, sajátosságai)**
- **Egyenletek**
- **Egyéb alkalmazások**

2. A témakör tartalmi felépítésének kifejtése

2.1 Történeti bevezető

Galileo Galilei (1564-1642) olasz fizikus, matematikus elsők között ismerte fel, hogy a fizikai jelenségeket kísérletekkel tanulmányozhatjuk, és a törvényszerűségek leírására a matematika eszközei, a függvények használhatók.

2.2 Elsőfokú függvény (definíció jellemzés)

<u>Függvény definíciója</u>: Legyen adott két nem üres halmaz. Ha az A halmaz minden egyes eleméhez a B halmazból pontosan egy értéket rendelünk hozzá, akkor ezt a hozzárenedelést függvénynek nevezzük.
A A halmazt a függvény *értelmezési tartomány*ának, a B halmazt a függvény képhalmazának mondjuk. A B képhalmaznak a függvény helyettesítési értékeit tartalmazó részét a függvény *értékkészlet*ének nevezzük.
A függvény tehát *egyértelmű* hozzárendelés az értelmezési tartomány és az értékkészlet elemei között.

Elsőfokú fgv.: Az $x \to mx + b$ (m és b adott számok) hozzárendeléssel definiált függvény grafikonja olyan egyenes, amelynek meredeksége m, és az y tengelyt a $(0,b)$ pontban metszi.

Az $f(x) = mx + b$ ($m \neq 0$ és b adott számok) alakú függvényeket *elsőfokú függvényeknek* nevezzük. Ha $m=0$, akkor a függvényeket $f(x) = b$ alakban adjuk meg, ennek képe az x tengellyel párhuzamos egyenes. Az ilyen függvények közös neve: *lineáris függvények*. Ha m pozitív, akkor a függvény szigorúan monoton növekedő, ha m negatív, akkor szigorúan monoton csökkenő.

Általában minden $f: H \to R$, $f(x) = mx$ ($H \subset R$) függvényről azt is mondhatjuk, hogy *egyenes arányosság*, amelynek arányossági tényezője m.

Jellemzés:

- Értelmezési tartomány (Df)
- Érték készlet (Rf)
- Zérushely; Azon elemek0, értelmezési tartomány beli halmaza, ahol a függvény helyettesítési értéke: 0 f(x) = 0
- Monotonitás
- Minimum, maximum: helyi(lokális) v. abszolút
- Periódikusság: Egy függvénynek p szám a periódusa (p>0),ha
    - 1. Minden x eleme Df-re igaz, hogy x+p eleme Df-nek
    - 2.Minden x eleme Df-re igaz, hogy f(x) = f(x+p)
    - Periódusnak a legkisebb ilyen p-t szokás nevezni
- Korlátosság: 1. Alulról: Minden x eleme Df – re igaz, hogy f(x)≥ K
    - 2. Felülről Minden x eleme Df – re igaz, hogy f(x)≤ K
    - 3. Alulról és felülről is. Pl.: sin x

2.3 Másodfokú függvény (általános alak, jellemzés, sajátosságai.

Általános alakja: $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$, és a, b és c tetszőleges valós szám).

Az $f(x) = ax^2 + bx + c$ alakban az a és c paraméterek jelentése:

- a a parabola y tengely irányába való nyújtását ($|a| > 0$) vagy zsugorítását ($|a| < 0$) jelenti;
- $a < 0$ esetben a grafikont tükrözni kell az x tengelyre.

Általában igaz, hogy ha a másodfokú polinomnak van valós gyöke, akkor szorzattá tudjuk alakítani:
Gyöktényezős alak: Az $a(x-x_1)(x-x_2) = 0$ alakot a másodfokú egyenlet gyöktényezős alakjának nevezzük.
Az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenlet gyökei és együtthatói között fennállnak a következő összefüggések:

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ és $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

Ezeket az összefüggéseket Viéte-féle formuláknak is nevezzük.

Teljes négyzet alak (implicit alak): $x \to a(x-u)^2 + v$ ($a \neq 0$, és a, u és v tetszőleges valós szám)
Ekkor az y tengelyű, $T(u,v)$ tengelypontú normál parabolát az x tengely irányában u-val, az y tengely irányában v-vel kell eltolni.

Általános jellemzés:

- Értelmezési tartománya a valós számok halmaza: $D_f = R$.
- Azt az x valós számot, ahol $f(x) = 0$, a függvény zérushelyének nevezzük.
- Szélsőértéke az $x = u$ helyen van.
- Szé., Mon., Konvexitás:

o ha a>0, akkor minimuma van (a parabola alulról nézve konvex)
ekkor a függvény a $]-\infty; u]$ intervallumon szigorú monoton csökken,
és a $[u; \infty[$ intervallumon szigorú monoton nő.
o ha a<0, akkor maximuma (a parabola alulról nézve konkáv)
ekkor a függvény a$]-\infty; u]$ intervallumon szigorúan monoton nő,
és a $[u; \infty[$ intervallumon szigorú monoton csökken.

- Paritása: páros, grafikonja az y tengellyel párhuzamos tengelyű parabola.
- Nem periódikus
- Nem korlátos (Alulról igen)
- Folytonos

Az $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$, és a, b és c tetszőleges valós szám) másodfokú egyenlet *megoldóképletének* vagy *gyökképletének* nevezzük $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ kifejezést. A megoldóképletben a b^2-4ac kifejezést a másodfokú kifejezés diszkriminánsának nevezzük, és D-vel jelöljük: $D = b^2 - 4ac$. Diszkrimináns (latin) szó jelentése: meghatározó, döntő tényező.

o ha $D > 0$, akkor az $f(x)$ függvénynek két zérushelye van, és a szélsőértékét ezek számtani közepében veszi fel: $-\frac{b}{2a} = \frac{x_1 + x_2}{2}$

- ha $D = 0$, akkor az $f(x)$ függvénynek egy zérushelye van (kétszeres gyök), a függvénygrafikon az x tengelyt az $x = -\frac{b}{2a}$ helyen érinti, ezen a helyen van a szélsőértéke.
- ha $D < 0$, akkor az $f(x)$ függvénynek nincs zérushelye, a parabola nem metszi és nem is érinti az x tengelyt, de a szélsőértéke ekkor is az $x = -\frac{b}{2a}$ helyen van.

2.4 Egyenletek:

Egyenlet bármely két egyenlőségjellel összekapcsolt kifejezés. Az egyenletet szokás olyan speciális nyitott mondatnak (változó(k)tól függő állítás) is nevezni, amelynek alaphalmaza számhalmaz.

Egyenlőtlenségről beszélünk, ha a két kifejezést a kisebb (<), nagyobb(>), nemkisebb(≥),nemnagyobb(≤) relációs jelek kapcsolnak össze.

Az egyenlet, egyenlőtlenség megoldásakor az alaphalmaz mindazon értékeit keressük, amelyekhez az **igaz** logikai érték tartozik. A változó(k) ezen értékeinek halmazát az egyenlet, egyenlőtlenség **igazsághalmazának** nevezzük.

Két egyenletet illetve egyenlőtlenséget **ekvivalensnek** (egyenértékűnek) mondunk, ha azonos az alaphalmazuk és a megoldáshalmazuk, azaz igazsághalmazuk is.

<u>Egyenletek megoldási módjai:</u> ÉT. vagy ÉK. vizsgálata; grafikusan; szorzattá alakítással; mérleg-elvvel; következtetéssel; próbálgatással

<u>Tétel:</u>

A másodfokú <u>egyenlet</u> általános alakja: $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$ ($a \neq 0$)

A másodfokú egyenlet megoldóképletének levezetése: (szorzattá alakítással)

Emeljük ki a másodfokú tag együtthatóját, az **a**-t!
Itt kihasználtuk azt a feltételt, hogy **a≠0.**

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0$$

A zárójelben szereplő másod- és elsőfokú tagból képezzünk teljes négyzetet!

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] = 0$$

A szögletes zárójelben lévő második tagban végezzük el a tört négyzetre emelését!

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = 0$$

A szögletes zárójelben lévő, változót nem tartalmazó tagokat írjuk közös törtvonalra.

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = 0$$

A szögletes zárójelben szereplő második tagot négyzetes alakba írva, a szögletes zárójelen belül két négyzet különbségét kaptuk. Itt azonban feltételeztük azt, hogy $\mathbf{b^2 - 4ac \geq 0}$. Ha nem, akkor az egyenletnek nincs megoldása a valós számok között.

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2\right] = 0$$

A szögletes zárójelben szereplő négyzetes tagok különbségére alkalmazzuk az $\mathbf{x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)}$ azonosságot!

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\right]=0$$

Itt a közös nevezőjű törteket egy törtvonalra írva a következő alakot kapjuk.

$$a\left[\left(x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\right]=0$$

Most felhasználjuk azt, hogy egy szorzat csak akkor lehet egyenlő nullával, ha valamelyik tényezője nulla, ezért a fenti kifejezés két esetben lehet nulla:

Vagy $x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0$

Vagy $x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0$

Az egyenlet egyik gyöke: $x_1=-\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Az egyenlet másik gyöke: $x_2=-\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Az egyenlet két gyökét összevonva egy kifejezésbe:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

alakot kapjuk. Ezt nevezzük a **másodfokú egyenlet megoldóképletének.**

2.5 Egyéb alkalmazások:

1. Lineáris programozás
2. Ferde hajítás (fizika)
3. Egyenletesen gyorsuló mozgás út - idő függvénye (fizika)
4. Négyzetes úttörvény (fizika)
5. Szélsőérték problémák megoldása elemi úton
6. Algebrai törtek egyszerűsítése

Négyzetes úttörvény (fizika):

Mekkora utat tesz meg és mekkora sebességet ér el a $2m/s^2$ induló gépkocsi 20 s alatt?

S(út)= $a/2x\Delta t^2$= 400m

V(sebesség) $ax\Delta t$=40m/s

<u>Kidolgozója</u>: *Zalkai Dániel* 12.D