9. Tétel
Első- és másodfokú egyenlőtlenségek. Pozitív számok nevezetes közepei, ezek felhasználása szélsőérték-feladatok megoldásában

Bevezető:

A témakörben első- és másodfokú egyenlőtlenségek megoldásának menetéről, s ezen folyamat közben felmerülő problémákról szeretnék beszélni, de mindenek előtt a pozitív számok nevezetes közepeiről, s majd ezek felhasználásával a szélsőérték-feladatok megoldásáról.

0. Egy kis történeti bevezető a témához:

Thomas Harriot (1560-1621) angol matematikus és geográfus vezette be a kisebb és nagyobb jelet, melyet ma is ebben a formában használunk. Tőle származik még a zárójel is. Munkáiból kitűnik, hogy tisztában volt az egyenletek, egyenlőtlenségek általános elméletének jelentős részével.

Egyenlőtlenségről beszélünk, ha a két kifejezést a kisebb (<), nagyobb(>), nemkisebb(≥), nemnagyobb (≤) relációs jelek kapcsolnak össze.

<u>Egyenletek megoldási eljárásai (+példák):</u>

1. <u>Elsőfokú egyenlőtlenségek gyakran használt megoldási módszerei</u>:

• Mérleg-elvvel

$$2x+19 \le 5x-3(2x+2)$$
$$2x+19 \le 5x-6x-6$$
$$2x+19 \le -x-6$$
$$3x \le -25$$
$$x \le -25/3$$

• Grafikusan

$$\frac{2x-15}{5} \ge 4-x$$

Ezt ábrázolon külön-külön és az megadja megoldast majd…

• Előjel vizsgálatával

$$\frac{x-4}{x+1} > 3$$
$$\frac{x-4-3(x+1)}{x+1} > 0$$
$$\frac{x-4-3x-3}{x+1} > 0$$
$$\frac{-2x-7}{x+1} > 0$$

Most a számlálót és a nevezet úgy vizsgálom, h mikor nagyobb mindegyik, mint nulla, es mikor kisebb mindkettő, mint nulla. Ez majd megoldásra vezet remélhetőleg.

2. <u>Másodfokú egyenlőtlenségek gyakran használt megoldási módszerei:</u>

• Megoldóképlettel és függvény vizsgálatával

$$-x^2+3x-1\le 0$$

$$ax^2+bx+c=0$$

$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

• Szorzattá alakítással

$$x^2-12x+32>0$$

• Grafikusan

$$(x-1)^2-4\ge 3-x$$

• Értékkészlet vizsgálatával

$$x^2-4x+y^2+6y+13\le 0$$

• Előjel vizsgálatával

$$\frac{x^2-8x+16}{x^2-6x+12}\le 0$$

1. Pozitív számok nevezetes közepei:

1. Két nemnegatív szám ***<u>számtani közepén</u>*** a két szám összegének a felét értjük.
   A számtani közepet szokás aritmetikai középnek is nevezni, és "A" betűvel jelölni.
   Formulával:
   $A(a;b)=\frac{a+b}{2}$, ahol a ; b $\in$ R, a ≥ 0; b ≥ 0.

2. Két nemnegatív szám ***<u>mértani közepén</u>*** a két szám szorzatának a négyzetgyökét értjük.
   A mértani közepet szokás geometria középnek is nevezni, és "G" betűvel jelölni.
   Formulával:
   $G(a;b)=\sqrt{ab}$, ahol a;b $\in$ R, a ≥ 0; b ≥ 0.

3. Két nemnegatív szám ***<u>négyzetes közepének</u>*** nevezzük azt a számot, amelyet a két szám négyzetének számtani közepéből négyzetgyökvonással kapunk.
   A négyzetes közepet szokás "N" betűvel jelölni.
   Formulával:
   $N(a;b)=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, ahol a;b $\in$ R, a ≥ 0; b ≥ 0.

4. Két pozitív szám ***<u>harmonikus közepe</u>*** a két szám reciprokából számított számtani közép reciproka.
   A harmonikus közepet szokás "H" betűvel jelölni.

Formulával:

$$H(a;b) = \frac{1}{\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

, ahol a;b ∈ R, a>0; b>0.

+. HiGANy ☺

Szélsőértékfeladatok megoldása

• Másodfokú függvény vizsgálatával
• Nevezetes közepekkel
- szorzat maximuma, ha az összeg állandó
- összeg minimuma, ha a szorzat állandó

1. Tétel: Tetszőleges a > 0 pozitív számnak és reciprokának összege legalább 2.

2. Tétel: Két nemnegatív valós szám mértani közepe nem nagyobb, mint ugyanezen két szám számtani közepe.
Formulával:

$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$$

Bizonyítás:

Mivel az állítás mindkét oldalán nemnegativ kifejezés áll, ezért mindkét oldalát négyzetre emelhetjük, ez most ekvivalens átalakítás:

$$ab \le \frac{(a+b)^2}{4}$$

A jobboldali kifejezésben a zárójel felbontása és a nevezővel történő átszorzás után:

$$4ab \le a^2 + 2ab + b^2$$

Az egyenlőtlenséget rendezve, azaz 0-ra redukálva:

$$0 \le a^2 - 2ab + b^2$$

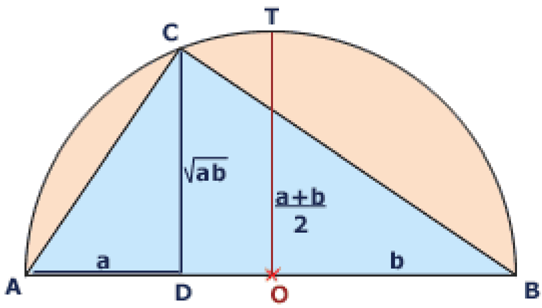
Így a jobb oldalon teljes négyzetet kaptunk:

$$0 \le (a-b)^2,$$

amely mindig igaz.
Az egyenlőség akkor következik be, ha a két szám egyenlő.

A számtani és mértani közép közötti összefüggést geometriai úton is szemléltethetjük:

Legyen adott két **a** illetve **b** hosszúságú szakasz.
Vegyünk fel egy **a + b = AB** átmérőjű kört. Az **a** és **b** szakaszok D találkozási pontjában emeljünk merőlegest az AB átmérőre.
Így kapjuk a C pontot. Thalesz tétele szerint az ABC háromszög derékszögű. Ebben az AB átfogóhoz tartozó CD magasság a magasság tétel értelmében mértani közepe az AB átfogó két szeletének, az **a** és **b** hosszúságú szakaszoknak. Ez a CD szakasz pedig nem lehet nagyobb a kör sugaránál, az OT szakasznál, amely a két szakasz számtani közepével egyenlő.



Alkalmazások:

Matematika:

- Szélsőérték-feladatok megoldása

  Van egy derékszögű kereszteződés. A kereszteződésből indul egy autó 2m/s^2 gyorsulással. A kereszteződéstől 100 méterre egy motoros indul 2m/ s^2 gyorsulással. Mikor lesz a koztuk levo tavolsag a legkisebb az indulastól számítva?

$$\frac{a}{2}t^2 = s$$
$$s^2 + (100 - s)^2 = d^2 \min$$
$$s^2 + 10000 + s^2 - 200s = \min$$
$$\textit{deriválom!}$$
$$4s - 200 = 0$$
$$s = 50$$

$$50 = t^2$$
$$t = \sqrt{50}$$
$$50 = t^2$$
$$t = \sqrt{50}$$

- Szélsőérték-feladatok megoldása
  - Egyenlőtlenségek megoldása
  - Értelmezési tartomány meghatározása
  - Mértani közepek: magasság-tétel, befogó-tétel

    Adott egy derékszögű háromszög mely átfogójához tartozó magasságvonal talppontja az átfogót p=125 és q=5 szakaszokra osztja fel. Mekkora a háromszög magassága?

$$m = \sqrt{5 \cdot 125} = 25 \; m^2 = pq$$
$$m = \sqrt{5 \cdot 125} = 25$$

  - Négyzetes közép: szórás
  - Súlyozott közép: osztópont koordinátái

Egyéb:

• Statisztika

Pistikének van irodalomból 2 jegye. Egy kettes és egy hármas. Hányas lesz évvégén Pistike, ha a csúnya gonosz tanár lefelé kerekíti az átlagát fittyet hányva a matematika évszázados kerekítési szabályainak?

Megoldás:

2+3=5

5/2=2,5

Tehát Pistike kettest fog kapni.

(alkalmaztam a számtani közepet statisztikai célokra (átlagszámítás) megfejelve egy bonyolult kerekítési eljárással.)

Kidolgozója: *Rapp Tamás* 12.D